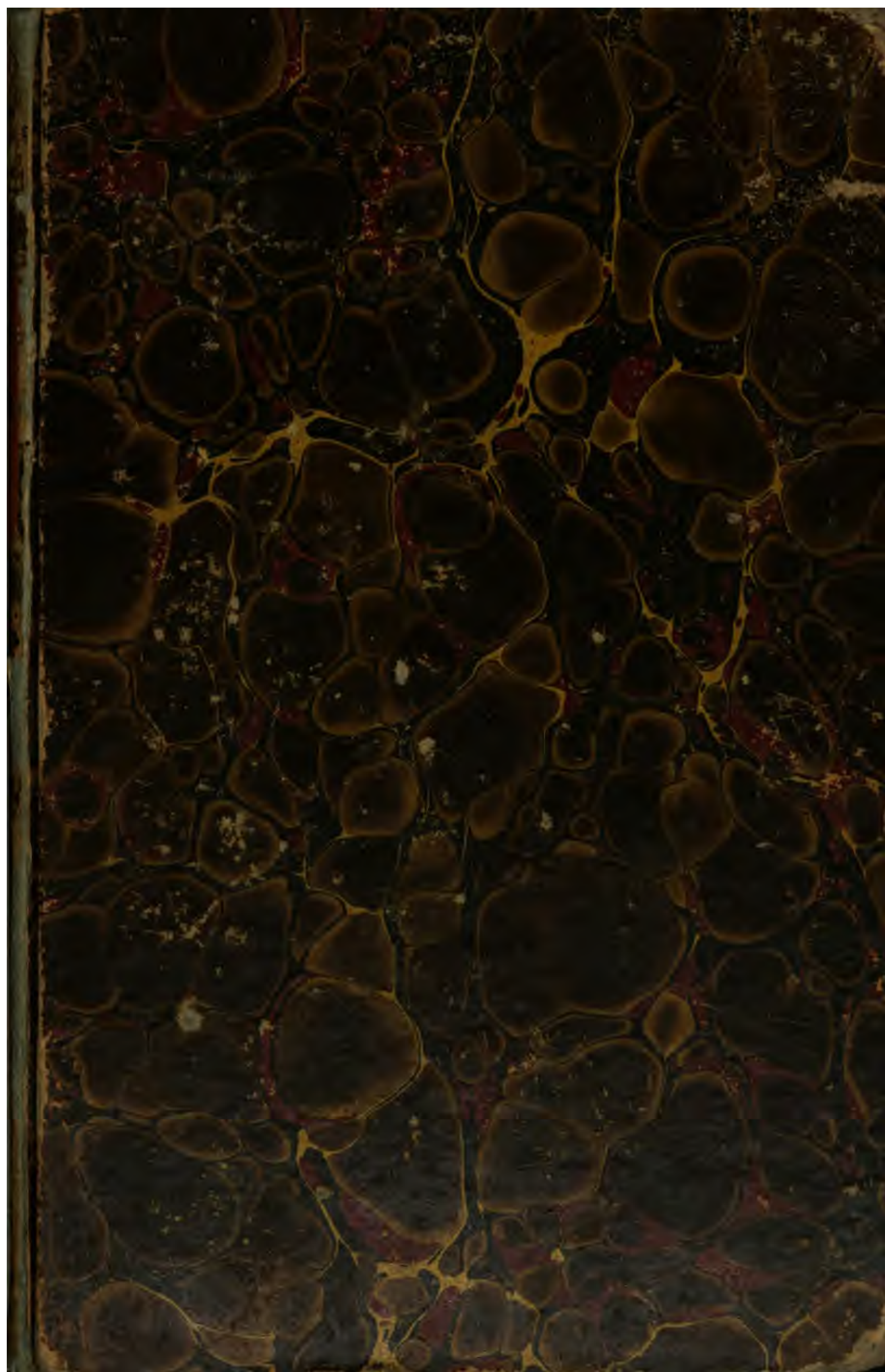




Grundriß

der

analytischen Sphärik.

Von

Christoph
C. Gudermann.

Mit sechs Steindrucktafeln.

Köln 1830.

Druck und Verlag von M. DüMont-Schauberg.

Vorbericht.

Die Oberfläche einer Kugel eignet sich wegen ihrer gleichmäßigen Krümmung eben so wohl zum Constructionsfelde, als die Ebene, und die Untersuchung der Gesetze sphärischer Constructionen führt zu Resultaten, welche nicht nur den planimetrischen analog, sondern noch allgemeiner sind, als diese, da sich ja, analytisch genommen, die Ebene auch als eine Kugelfläche mit unendlichem Radius darstellt. Man kann unter dem Namen „Sphärik" den Theil der Geometrie verstehen, welcher der Planimetrie gegenüber steht und die Gesetze der Constructionen auf der Oberfläche einer Kugel zum Gegenstande hat, obgleich man unter diesem Namen früher wohl nur die Lehre von der Kugel an und für sich verstand. Hiernach verhält sich überhaupt die Sphärik zur Planimetrie, wie insbesondere die sogenannte sphärische Trigonometrie zur ebenen.

Die Resultate, zu welchen frühere Untersuchungen sphärischer Constructionen geführt haben, begreift so ziemlich die sphärische Trigonometrie, welche der elementare Theil der Sphärik überhaupt ist, und deren Kenntniß hier also vorausgesetzt wird; denn nur in Einzelnheiten überschritt man die diesem Elementarabschnitte der Sphärik durch die Natur seiner Aufgabe gestellten Gränzen. An einer analytischen Sphärik aber fehlte es bisher gänzlich. Es ist zwar die analytische Sphärik allerdings ein Theil der analytischen Stereometrie überhaupt, und es könnten demgemäß sphärische Constructionen freilich auch analytisch im Gebrauche dreier Coordinaten x, y, z untersucht werden, weil man durch sie die Lage eines Punktes auf der Oberfläche der Kugel bestimmen kann; von diesen drei Coordinaten würde dann aber jede sich als abhängig von den beiden

übrigen darstellen, weil, wenn der Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkte genommen und ihr Radius = 1 gesetzt wird, im Falle rechtwinkeliger Parallel-Coordinaten allemal $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ wäre. Mittelst dieser Gleichung ließe sich dann aus einer gegebenen anderen Gleichung zwischen den drei Coordinaten jedesmal eine derselben eliminiren. Man wird aber das so eben berührte Verfahren, welches die analytische Geometrie überhaupt angibt, wohl nicht im Ernste als eine Methode der analytischen Sphärik geltend machen wollen. Ungleich einfacher erreicht sie ihre Zwecke im Gebrauche sphärischer Coordinaten. Wie in der Planimetrie reichen dann auch in der Sphärik zwei Coordinaten zur völligen Bestimmung der Lage eines Punktes hin, und dieser Grundriß ist gerade dazu bestimmt, die Sphärik in Anwendung der Methode sphärischer Coordinaten auszubilden, um auch in dieser Hinsicht die große Analogie zwischen der Sphärik und der Planimetrie weiter fortzuführen.

Die Geographie und Astronomie bedienen sich der sphärischen Coordinaten schon längst unter den Namen Azimuth und Höhe, Länge und Breite, Rectascension und Declination, also immer unter der Beschränkung auf ein rechtwinkeliges Coordinaten-System; auch die analytische Geometrie selbst hat ihren Gebrauch schon oft nicht verschmähet. Aber auch abgesehen von der berührten Beschränkung auf rechtwinkelige Coordinaten ist der Gebrauch derselben noch keineswegs zu reellen Zwecken der analytischen Sphärik früher gehörig ausgebildet worden, und Spuren der Anwendung eines schiefwinkeligen sphärischen Coordinaten-Systems möchten vollends schwerlich aus früherer Zeit gefunden werden. Außerdem hat die angestellte Untersuchung gezeigt, daß in den meisten Fällen der Gebrauch jener Coordinaten unbequem ist und daß man

in der Regel wohl thut, sich statt derselben der von mir so genannten Axen-Coordinaten zu bedienen. Auch der Gebrauch der Central-Coordinaten hat sich in vielen Fällen bequem erwiesen.

Die Verfolgung dieser Fundamentalbetrachtungen hat den Verfasser zum Besitzer wohlgeeigneter Methoden geführt, und die vielerlei Schwierigkeiten, welche früher mit der Untersuchung sphärischer Constructionen verknüpft waren, sind dadurch beseitigt worden, so daß dieselben in Zukunft mittelst des Gebrauches sphärischer Coordinaten fast mit derselben Leichtigkeit behandelt werden können, als wären sie planimetrisch. Jene Methoden haben sich auch schon bei der Auffindung mehrerer neuern und allgemeinern Theoreme bewährt, und ein Jeder, welcher sich von dem hier dargebotenen Grundrisse oder Leitfaden will einführen lassen, wird sehr bald das Vergnügen neuer und eigener Entdeckungen haben; denn unendlich ist das Gebiet der Sphärik und unendlich die Parallele, welche sie der Planimetrie gegenüberstellt.

Die Sphärik würde nur ein geringes Interesse für sich haben, wenn die mehr gedachte Analogie zwischen ihr und der Planimetrie sich zu sehr gleich bliebe, und sich nicht auf die mannigfaltigsten Weisen änderte. Diese Aenderungen der Analogie sind oft so groß, daß alle Aehnlichkeit aufzuhören scheint. Dazu kommt noch der Reiz, welcher durch die größere Verwickelung und das Gelingen der Enthüllung und glücklichen Auflösung hervorgebracht wird, und vor Allem der Reiz der Neuheit der Gegenstände, welche der analytischen Sphärik zur Behandlung zufallen.

Der Verfasser wird seinen Zweck als erreicht ansehen, wenn er die Aufmerksamkeit auf einen Zweig der Geometrie gelenkt hat, welcher so viele Ausbeute verspricht, und zur Gründung einer analytischen Sphärik beitrug, frei von

der dünkelhaften Meinung, in diesem Grundrisse sogleich überall den rechten Weg gefunden zu haben.

Da diese Schrift auf solche Leser berechnet ist, welche das planimetrische Coordinaten-Wesen schon kennen, so konnte eine ziemliche Kürze der Darstellung eintreten, und es schien also, z. B., unnöthig, auf den Unterschied der positiven und negativen Coordinaten besonders einzugehen. Wenn von der Entfernung zweier Punkte von einander die Rede ist, so lassen sich auf der Kugelfläche ihre kürzeste und größte Entfernung unterscheiden. Ferner gehört zu jedem Punkte ein Gegenpunkt, welcher um 180° von ihm entfernt ist und einer zweiten symmetrischen Construction angehört. Der Einfachheit wegen ist fast überall von den Gegenpunkten abgesehen, und die Figuren sind auch fast immer ohne Rücksicht auf sie gezeichnet worden. Wenn also etwa gesagt wird, daß sich zwei oder auch drei Hauptkreise in einem Punkte schneiden, so wird man sich leicht gewöhnen, noch immer einen zweiten Punkt, als Gegenpunkt des vorigen, zu denken, worin sich dieselben Hauptkreise ebenfalls schneiden. Hauptkreise sind häufig sphärisch-gerade Linien genannt worden. Am Schlusse des Werkchens ist die jüngst vom Herrn Professor Plücker mitgetheilte Idee eines neuen Coordinaten-Systems für die Planimetrie auch auf die Sphärik ausgedehnt worden, und es sind Beispiele vorgelegt, woran man sowohl die Mängel, als auch die Vorzüge dieser neuen Coordinaten-Methode wird hinlänglich abnehmen können, und die also zu einem wohlbegründeten Urtheile darüber führen.

Cleve, im Monat August 1830.

Der Verfasser.

Inhalt.

Verzeichniß nöthiger Verbesserungen.

Seite	Zeile				
V	6	von	oben,	lies:	Besitze, statt: Besitzer.
„	13	„	„	„	mehrerer neuen und allgemeinen Theoreme, statt: mehrerer neuern u. s. w.
21	19	„	„	„	$\text{tng}\cdot u^2 = a^2\ (1 + \text{tng}\ t^2)$ für: $\text{tng}\ u = a(1 + \text{tng}\ t^2)$.
24	1	„	„	„	$(t-x)$ für $(t-x)$.
„	16	„	„	„	Δx für $\sin \Delta x$.
25	15	„	„	„	tng statt tgn.
27	1	„	„	„	$\partial x'$ für ∂x.
29	5	„	„	„	$-(v^2+qyw^2)$ statt $-v^2(1+y^2-pxy)$.
34	8	„	„	„	z^4 für x^4.
35	5	„	„	„	welches für welche.
„	8	„	„	„	$(P+\Delta P)$ für $(P+\Delta P.)$.
„	16	„	„	„	Δx für ΔX.
„	22	„	„	fehlt	$\frac{p}{px-y}\cdot t - \frac{1}{yx-y}\cdot u = 1$.
„	29	„	„	lies	$\partial\alpha$ für ∂x.
39	11	„	„	„	$v^2.p$ für $v.{}^2p$.
„	17	„	„	„	$\text{tng}\ r'$ für $\text{tng}\ r$.
41	5	von	unten	„	∂v für $\sin v$.
45	4	„	„	„	$\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z^2)}$ statt $\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z)^2}$.
50	1	„	„	„	$\cos a^3$ für $\cos a^5$.
53	5	„	„	„	$p'+q'x+r'y$ für $p'+q'x+ry$.
61	5	„	„	„	Ex für Et.
72	2	von	oben	„	$\text{tng}\ x + \text{tng}\ b$ für $\text{tng}\ (x+b)$.
120	19	„	„	„	$+na$ für $+ma$.
134	20	„	„	„	$\left(\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right)$ für $\left(\alpha\frac{-\alpha'}{2}\right)$.
137	10	„	„	fehlt	das Glied: $+\alpha\delta$.
„	27	„	„	lies	$=o$ statt $+o$.
138	22	„	„	„	Er statt Es.
148	22	„	„	„	BAC′ statt ABC′.
„	25	„	„	„	G′ A für G′A′.
156	6	von	unten	„	$+t' \cos C).u$ statt $+t' \cos C.u$.

Auch muß in Fig. 39 Tab. VI. der Buchstabe P abgeändert werden in R.

Von den sphärischen Coordinaten-Systemen und der Gleichung an die sphärisch-gerade Linie.

§. 1.

Um (Fig. 1) die Lage eines Punktes M auf der Oberfläche einer Kugel durch Coordinaten zu bestimmen, dienen zunächst zwei Quadranten von Hauptkreisen VX = 90° und VY = 90° als Coordinaten-Axen, welche sich im Punkte V, dem Anfangspunkte der Coordinaten, unter einem willkürlichen Winkel XVY = v schneiden. Dieser Winkel mag der Axenwinkel genannt werden; der Punkt X heiße der Cardinalpunkt der ersten Axe VX und eben so Y der Cardinalpunkt der zweiten Axe VY.

Der Bogen XY eines Hauptkreises, wodurch die beiden Cardinalpunkte verbunden werden, mag die Cardinale des Coordinaten-Systems genannt werden.

Um nun den Punkt M auf die beiden Axen zu beziehen, werden nach ihm hin von den Cardinalpunkten X und Y aus die Bogen XMQ und YMP gezogen, wovon die Axen in Q und P geschnitten werden. Es ist dann y = VQ die Gleichung an die sphärisch-gerade XMQ, und eben so ist x = VP die Gleichung an die durch den Cardinalpunkt Y gehende Linie YMP; der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien ist M und es heißen

$$VP = x \text{ und } VQ = y$$

die Axen-Coordinaten des Punktes M, weil sie wirklich Theile der Axen sind. Durch sie ist die Lage von M offenbar immer bestimmt, wenn sich die Linien XMQ und YMP wirklich schneiden, das heißt, wenn der Punkt M nicht in der Cardinale XY enthalten ist. Liegt ein Punkt m in ihr, so kann seine Lage offenbar nicht mittelst der Axen-Coordinaten bestimmt werden; ein Gleiches gilt, wenn m in der Verlängerung von XY liegt. Eine der Gleichungen $x = 90°$ und $y = 90°$ ist die Gleichung an die Cardinale.

Wenn eine Gleichung $\varphi(x, y) = o$ zwischen x und y gegeben ist, und das Verhältniß $\frac{\text{tng } y}{\text{tng } x}$ sich für $x = 90°$ oder auch für $y = 90°$ auf das Gränzverhältniß $\frac{A}{1}$ zusammenzieht, so ist, wie bald nachher erhellen wird, $\frac{A}{1} = \frac{\sin Xm}{\sin Ym}$, und hierdurch ist dann gleich-

wohl die Lage des Punktes m in der Cardinale XY bestimmt. Die Gleichungen an die beiden Axen VX und VY sind $x = o$ und $y = o$, und beide Gleichungen vereinigt geben die Axen-Coordinaten des Punktes V an. Die Cardinale XY ist übrigens auch noch das Maß des Axenwinkels v, und eben deßwegen wird durch das bekannte Verhältniß $A = \frac{\sin Xm}{\sin Ym}$ die Lage des Punktes m der Cardinale völlig bestimmt.

§. 2.

Als zweites Mittel der Lagenbestimmung bieten sich die Abscissen der einen oder anderen Axe und die zugehörigen Applicatenverhältnisse dar. Ist nämlich $VP = x$ die Abscisse des Punktes M auf der ersten Axe, so ist das Verhältniß: $\varphi y = \frac{\sin PM}{\sin YM}$ das ihr zugehörige Applicatenverhältniß. Ganz eben so ist die Lage des Punktes M auch bestimmt durch die Abscisse $VQ = y$ auf der zweiten Axe und das ihr zugehörige Applicatenverhältniß $\varphi x = \frac{\sin QM}{\sin XM}$.

Die Stücke $PM = y'$ und $QM = x'$ kann man die den Abscissen VP und VQ zugehörigen Applicaten nennen; aber ihr Gebrauch ist unbequem, wenn der Axenwinkel v ein schiefer ist.

Der Winkel $VYP = X$ heiße die erste und der Winkel $VXQ = Y$ heiße die zweite Amplitude des Punktes M; auch sie bezeichnen die Lage des Punktes M.

Die Winkel $XPY = p$ und $YQX = q$ heißen die Applicatenwinkel; sie sind von veränderlicher Größe, wenn der Axenwinkel v ein schiefer ist; endlich heiße der Winkel XMY der Gegenwinkel des Axenwinkels für den Punkt M.

Wenn der Axenwinkel $v = 90°$ ist, so ist offenbar: $YP = XQ = 90°$; ferner ist dann auch: $p = q = 90°$; weiter ist nun: $X = x$ und $Y = y$; und endlich hat man nun auch noch: $\varphi y = \operatorname{tng} y'$ und $\varphi x = \operatorname{tng} x'$.

§. 3.

Die vorhin genannten Größen stehen im Zusammenhange mit einander, und beachtet man, daß im Dreiecke VXY die beiden Winkel VYX und VXY, unter welchen die Axen von der Cardinale geschnitten werden, rechte sind, so findet man leicht die folgenden Formeln:

$$\cot p = \cot v \,.\, \cos x \text{ und } \cot q = \cot v \,.\, \cos y.$$

Weiter hat man:

$$\sin YP = \frac{\sin v}{\sin p}, \qquad \sin XQ = \frac{\sin v}{\sin q}$$

und

$$\cos YP = \cos v . \sin x; \qquad \cos XQ = \cos v . \sin y.$$

Die beiden Amplituden des Punktes M geben die Formeln:

$$\sin X = \sin p . \sin x, \qquad \sin Y = \sin q . \sin y,$$

$$\cos X = \frac{\cos p}{\cos v}, \qquad \cos Y = \frac{\cos q}{\cos v},$$

$$\operatorname{tng} X = \sin v . \operatorname{tng} x; \qquad \operatorname{tng} Y = \sin v . \operatorname{tng} y.$$

Da ferner $\frac{\sin XP}{\sin XV} = \frac{\sin PM}{\sin YM} : \frac{\sin VQ}{\sin YQ}$ ist, so hat man offenbar das Applicatenverhältniß:

$$\varphi y = \operatorname{tng} y . \cos x,$$

und eben so

$$\varphi x = \operatorname{tng} x . \cos y,$$

woraus noch folgt: $\varphi x . \varphi y = \sin x . \sin y$. Will man die Applicaten x' und y' selbst durch die Axen-Coordinaten ausdrücken, so hat man:

$$\cot x' = \left(\frac{\cot x}{\cos y} + \cos v . \sin y\right) : \sqrt{(1 - \cos v^2 . \sin y^2)},$$

$$\cot y' = \left(\frac{\cot y}{\cos x} + \cos v . \sin x\right) : \sqrt{(1 - \cos v^2 . \sin x^2)}.$$

Wenn der Axenwinkel $v = 90°$ ist, so hat man die einfacheren Formeln:

$$\operatorname{tng} y' = \operatorname{tng} y . \cos x \text{ und } \operatorname{tng} x' = \operatorname{tng} x . \cos y,$$

welche später sehr oft zur Anwendung kommen. Unter dieser speciellen Annahme $v = 90°$ hat man auch noch:

$$\sin x' = \sin x . \cos y' \text{ und } \sin y' = \sin y . \cos x'.$$

Zusatz. Wird für $v = 90°$ gesetzt $VP = x$ und $PM = z$, ferner $VQ = t$ und $QM = u$, so hat man also, wenn eine Gleichung zwischen x und z gegeben ist, zu substituiren:

$\operatorname{tng} x = \frac{\operatorname{tng} u}{\cos t}$, und $\sin z = \sin t . \cos u$, wenn man zu einer Gleichung zwischen t und u übergehen will. Diese Ausdrücke lassen sich auch umformen in:

$$\sin x^2 = \frac{\operatorname{tng} u^2}{\operatorname{tng} u^2 + \cos t^2} \text{ und } \operatorname{tng} z^2 = \frac{\sin t^2}{\operatorname{tng} u^2 + \cos t^2},$$

welche Formeln wegen der Uebereinstimmung ihrer Nenner zu bemerken sind.

§. 4.

Zu den vorigen Coordinaten eines Punktes M in Fig. 1 kommen noch seine Central-Coordinaten. Es kann nämlich die Lage

von M auch bestimmt werden durch die Entfernung $VM = z$ und den Winkel $XVM = \alpha$ oder den Winkel $YVM = \beta = v - \alpha$.

Diese Coordinaten hangen auf eine bemerkenswerthe Weise von den Axen-Coordinaten x und y des Punktes M ab.

Wird nämlich der Leitstrahl VM verlängert, bis die Cardinale XY davon in m geschnitten wird, so ist: $Xm = \alpha$ und $Ym = \beta$.

Es gelten nun aber offenbar die beiden folgenden Proportionen:

$$\frac{\sin Xm}{\sin XY} = \frac{\sin mM}{\sin VM} : \frac{\sin YQ}{\sin VQ} \text{ und } \frac{\sin Ym}{\sin YX} = \frac{\sin mM}{\sin VM} : \frac{\sin XP}{\sin VP},$$

oder, weil $VX = Vm = VY = 90°$ und $XY = v$ ist, die einfacheren:

$$\frac{\operatorname{tng} y}{\operatorname{tng} z} = \frac{\sin \alpha}{\sin v} \text{ und } \frac{\operatorname{tng} x}{\operatorname{tng} z} = \frac{\sin \beta}{\sin v}.$$

Hieraus aber leitet man leicht die folgenden Formeln her:

$$\operatorname{tng} z = \sqrt{(\operatorname{tng} x^2 + 2 \operatorname{tng} x . \operatorname{tng} y . \cos v + \operatorname{tng} y^2)},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin v . \operatorname{tng} y}{\operatorname{tng} z} \qquad \sin \beta = \frac{\sin v . \operatorname{tng} x}{\operatorname{tng} z},$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tng} x + \cos v . \operatorname{tng} y}{\operatorname{tng} z} \qquad \cos \beta = \frac{\operatorname{tng} y + \cos v . \operatorname{tng} x}{\operatorname{tng} z},$$

$$\operatorname{tng} \alpha = \frac{\sin v . \operatorname{tng} y}{\operatorname{tng} x + \cos v . \operatorname{tng} y} \qquad \operatorname{tng} \beta = \frac{\sin v . \operatorname{tng} x}{\operatorname{tng} y + \cos v . \operatorname{tng} x}.$$

Man sieht hieraus überhaupt, daß die Größen tng x, tng y, tng z sich construiren lassen als Seiten eines ebenen Dreiecks, wenn man zu Gegenwinkeln dieser Seiten in einem solchen Dreiecke nimmt der Reihe nach die Winkel β, α und $180° - v$, weßhalb denn alle das ebene Dreieck betreffenden Formeln hier eine Anwendung finden.

Zusatz. Zieht man im Vierecke VPMQ noch die zweite Diagonale PQ, wovon die erste in R geschnitten werden mag, so findet man bald:

$$\operatorname{tng} VR = \tfrac{1}{2} \operatorname{tng} VM \text{ und } \frac{\sin QR}{\sin PR} = \frac{\cos VQ}{\cos VP} = \frac{\cos y}{\cos x}.$$

Setzt man den Radius der Kugel $= 1/0$, so verwandelt sich $\frac{\operatorname{tng} VR}{\operatorname{tng} VM}$ in $\frac{VR}{VM}$; $\frac{\sin QR}{\sin PR}$ in $\frac{QR}{PR}$; cos y in 1 und auch cos x in 1; daher ist nun: $PR = QR$ und $VR = MR$, und es ist also nun das Viereck VPMQ ein Parallelogramm.

§. 5.

Ein Blick auf die vorigen Formeln führt zu der Bemerkung, daß beim Gebrauche der Axen-Coordinaten dieselben fast durchgehends mittelst der trigonometrischen Tangenten, selten mittelst der

Sinus und Cosinus in Rechnung kommen werden. Hierin aber besteht schon ein namhafter Vorzug der Axen-Coordinaten vor allen übrigen Coordinaten, welche der Sphärik zu Gebote stehen. Daher thut man auch wohl, im Gebrauche der Axen-Coordinaten nicht sowohl für sie selbst, als vielmehr für ihre trigonometrischen Tangenten die Zeichen zu wählen. Man kann demgemäß einen Punkt M durch (a, b) bezeichnen, wenn seine Axen-Coordinaten sind x und y, und a=tng x, b=tng y gesetzt wird. Die Axen-Coordinaten sind dann umgekehrt: arc (tng=a) und arc (tng=b). Bei Beobachtung dieser Bezeichnungsart werden die aufzustellenden Formeln viel gedrängter und übersichtlicher, weil das überflüssige Schreiben der Vorsylben tng, tng vermieden wird. In Anwendung dieser Bezeichnungsart sind die vorigen Formeln:

$$\sin\alpha = \frac{b \sin v}{\text{tng } z}, \qquad \sin\beta = \frac{a \cdot \sin v}{\text{tng } z},$$

$$\cos\alpha = \frac{a+b \cos v}{\text{tng } z}, \qquad \cos\beta = \frac{b+a \cos v}{\text{tng } z},$$

$$\text{tng } \alpha = \frac{b \sin v}{a+b \cos v}, \qquad \text{tng } \beta = \frac{a \sin v}{b+a \cos v}$$

$$\text{und } \text{tng } z = \sqrt{(a^2+2ab \cos v+b^2)},$$

$$\text{oder } \frac{1}{\cos z} = \sqrt{(1+a^2+b^2+2ab \cos v)}.$$

Die Größe des Gegenwinkels XMY = M des Axenwinkels für den Punkt M hängt ebenfalls von seinen Axen-Coordinaten ab, und es ist im Dreiecke XMY offenbar:

$$\cos M = -\cos MXY \cdot \cos MYX + \sin MXY \cdot \sin MYX \cdot \cos XY,$$

oder in Anwendung der beiden Amplituden des Punktes M:

$$\cos M = -\sin X \cdot \sin Y + \cos X \cdot \cos Y \cdot \cos v,$$

oder auch $\cos M = \cos X \cdot \cos Y\ (\cos v - \text{tng } X \cdot \text{tng } Y)$.

Da aber $\text{tng } X = \sin v \cdot a$ und $\text{tng } Y = \sin v \cdot b$ nach §. 3 ist, so hat man endlich:

$$\cos M = \frac{\cos v - a \cdot b \cdot \sin v^2}{\sqrt{(1+a^2 \sin v^2)} \cdot \sqrt{(1+b^2 \sin v^2)}},$$

und hieraus findet man weiter:

$$\sin M = \frac{\sin v \cdot \sqrt{(1+a^2+b^2+2ab \cos v)}}{\sqrt{(1+a^2 \sin v^2)} \cdot \sqrt{(1+b^2 \sin v^2)}}.$$

Diese Formeln sind deßwegen für uns wichtig, weil wir daraus später das Differenzial der Fläche in allgemeinster Weise herleiten.

Soll der Winkel M ein rechter seyn, so hat man für die Axen-Coordinaten des Punktes M oder (a, b) die Bedingungsgleichung:

$$a \cdot b = \frac{\cos v}{\sin v^2},$$

welche, wie später gezeigt wird, die Gleichung an einen auf die Asymptoten bezogenen sphärischen Kegelschnitt, als den geometrischen Ort des Punktes M, ist.

§ 6.

Um aus den Axen-Coordinaten zweier Punkte M und M' ihren sphärischen Abstand MM' = d von einander zu finden, seyen arc ($\text{tng} = a'$) und arc ($\text{tng} = b'$) die Axen-Coordinaten des Punktes M', nach welchem hin wir noch den Bogen VM' = z' ziehen, der mit der Axe VX den Winkel α' einschließen mag. Es ist dann im (sphärischen) Dreiecke MVM'

$$\cos d = \cos z . \cos z' + \sin z . \sin z' . \cos(\alpha' - \alpha), \text{ oder}$$
$$\cos d = \cos z . \cos z' [1 + \text{tng}\, z . \text{tng}\, z' . \cos(\alpha' - \alpha)].$$

Nun ist aber $\sin\alpha = \frac{b \sin v}{\text{tng}\, z}$, $\sin\alpha' = \frac{b' \sin v}{\text{tng}\, z'}$, $\cos\alpha = \frac{a + b \cos v}{\text{tng}\, z}$,

$\cos\alpha' = \frac{a' + b' \cos v}{\text{tng}\, z'}$, und also:

$$\cos(\alpha' - \alpha) = \frac{aa' + ab' \cos v + ba' \cos v + bb'}{\text{tng}\, z . \text{tng}\, z'}.$$

Daher hat man denn die folgende allgemeine Formel:

$$\cos d = \frac{1 + aa' + bb' + ab' \cos v + ba' \cos v}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2 + 2 ab \cos v)} . \sqrt{(1 + a'^2 + b'^2 + 2 a' b' \cos v)}}.$$

Aus ihr findet man durch Umformung noch die beiden folgenden:

$$\sin d = \sqrt{\frac{(a'-a)^2 + 2(a'-a)(b'-b)\cos v + (b'-b)^2 + (ab'-ba')^2 . \sin v^2}{(1 + a^2 + b^2 + 2 ab \cos v) . (1 + a'^2 + b'^2 + 2a' b' \cos v)}},$$

$$\text{tng}\, d = \frac{\sqrt{[(a'-a)^2 + 2(a'-a)(b'-b)\cos v + (b'-b)^2 + (ab'-ba')^2 . \sin v^2]}}{1 + aa' + bb' + ab' \cos v + ba' \cos v}.$$

Dieselben Formeln sind, wenn a, b und d als constant, hingegen a' und b' als veränderlich angesehen werden, die allgemeinsten Gleichungen an einen Kreis auf der Kugel.

Sie ziehen sich, wenn der Axenwinkel v ein rechter ist, zusammen auf:

$$\cos d = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)} . \sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}},$$

$$\sin d = \sqrt{\frac{(a'-a)^2 + (ab'-ba')^2 + (b'-b)^2}{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}},$$

$$\text{tng}\, d = \frac{\sqrt{[(a'-a)^2 + (ab'-ba')^2 + (b'-b)^2]}}{1 + aa' + bb'}.$$

Zusatz. Soll ein Bogen d = 90° seyn, so hat man unter den Axen-Coordinaten seiner Endpunkte die Bedingungsgleichung:

$$1 + aa' + bb' + ab' \cos v + ba' \cos v = 0.$$

Setzt man hierin tng x für a′ und tng y für b′, so hat man die folgende Gleichung an einen Hauptkreis:

$$1+(a+b\cos v).\,\text{tng}\,x+(b+a\cos v).\,\text{tng}\,y=0.$$

Die Axen-Coordinaten seines Mittelpunktes sind arc (tng = a) und arc (tng = b).

Wegen der großen Uebereinstimmung der Form dieser Gleichung mit der Gleichung an die gerade Linie in einer Ebene nennen wir einen Hauptkreis oder auch einen Bogen desselben nicht selten hier eine sphärisch-gerade Linie, oder wohl selbst schlechtweg eine Gerade, weil daraus in der Sphärik keine Zweideutigkeit entsteht, da hier nie eine absolut-gerade Linie vorkommen kann.

§. 7.

Wir gelangen zu der Gleichung an die Gerade auch noch auf andere Art, und betrachten zunächst eine durch den Anfangspunkt gehende Linie VMm. Sind arc (tng = x) und arc (tng = y) die Axen-Coordinaten eines Punktes M dieser Geraden, und ist der Winkel MVP = α, MVQ = β, also $\alpha+\beta = v$, so ist nach §. 4:

$$y.\sin v = \text{tng}\,VM.\sin\alpha \text{ und } x.\sin v = \text{tng}\,VM.\sin\beta.$$

Daher ist die Gleichung an die Gerade VMm:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\,x.$$

Sie hat die Form: $y = A.x$, wenn $A = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ gesetzt wird, und man findet rückwärts:

$$\text{tng}\,\alpha = \frac{A\sin v}{1+A\cos v},\qquad \text{tng}\,\beta = \frac{\sin v}{A+\cos v},$$

$$\sin\alpha = \frac{A\sin v}{\sqrt{(1+2A\cos v+A^2)}},\qquad \sin\beta = \frac{\sin v}{\sqrt{(1+2A\cos v+A^2)}}.$$

§. 8.

Wenn aber in Fig. 2 die beiden Axen von der Geraden AMB in A und B geschnitten werden, so haben wir offenbar die beiden Proportionen:

$$\frac{\sin XA}{\sin XV} = \frac{\sin AM}{\sin BM} : \frac{\sin VQ}{\sin BQ} \text{ und } \frac{\sin YB}{\sin YV} = \frac{\sin BM}{\sin AM} : \frac{\sin VP}{\sin AP}.$$

Setzen wir darin VA = A und VB = B, und das Verhältniß:

$$\frac{\sin AM}{\sin BM} = \frac{m}{n},$$

so haben wir die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin(A-x)}{\sin x.\cos B} \text{ und } \frac{n}{m} = \frac{\sin(B-y)}{\sin y.\cos A},$$

welche wir weiterhin noch anders benutzen werden, jetzt aber verbinden zu der Gleichung:

$$\frac{\sin(A-x)}{\cos A \,.\, \sin x} \cdot \frac{\sin(B-y)}{\cos B \,.\, \sin y} = 1.$$

Durch Entwickelung erhält sie die folgende bemerkenswerthe Form:

$$\frac{\operatorname{tng} x}{\operatorname{tng} A} + \frac{\operatorname{tng} y}{\operatorname{tng} B} = 1,$$

in welcher sie die größte Aehnlichkeit mit der bekannten Gleichung an die gerade Linie in einer Ebene hat.

Fällt man vom Anfangspunkte V das Loth VL auf AB, und ist der Winkel AVL $= \gamma$, BVL $= \lambda$, so hat man bekanntlich:

$$\operatorname{tng} A \,.\, \cos\gamma = \operatorname{tng} r \text{ und } \operatorname{tng} B \,.\, \cos\lambda = \operatorname{tng} r,$$

wenn das Loth VL = r gesetzt wird. Daher geht die obige Gleichung an die Gerade AB über in:

$$\operatorname{tng} x \,.\, \cos\gamma + \operatorname{tng} y \,.\, \cos\lambda = \operatorname{tng} r.$$

Werden endlich die Lothe Pg und Qh auf VL gefällt, so ist offenbar noch:

$$\operatorname{tng} Vg + \operatorname{tng} Vh = \operatorname{tng} VL.$$

§. 9.

Stellt man die allgemeine Gleichung an die gerade Linie vor unter:

$$ax + by + c = o,$$

so ist: $\operatorname{tng} A = \frac{-c}{a}$ und $\operatorname{tng} B = \frac{-c}{b}$, und da $\frac{\operatorname{tng} A}{\operatorname{tng} B} = \frac{\cos\lambda}{\cos\gamma}$, so ist auch:

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\gamma} = \frac{b}{a}.$$

Daher ist die Richtung des Lothes VL unabhängig von der Constante c der Gleichung.

Man zieht hieraus noch:

$$\operatorname{tng}\gamma = \frac{b - a\cos v}{a \sin v} \text{ und } \operatorname{tng}\lambda = \frac{a - b\cos v}{b \sin v}.$$

Wird der Winkel VAB mit α und der Winkel VBA mit β bezeichnet, so ist:

$$\operatorname{tng}\alpha = \frac{\sin v \,.\, \sqrt{(a^2 + c^2)}}{b - a\cos v};\ \operatorname{tng}\beta = \frac{\sin v \,.\, \sqrt{(a^2 + c^2)}}{a - b\cos v}.$$

Die Neigung der Geraden AB gegen die beiden Axen hängt also in der Sphärik auch von der Constante c der Gleichung ab; nicht so verhält es sich in der Planimetrie.

Zur Bestimmung der Länge r des Lothes VL hat man die Formel:

$$\text{tng } r = \frac{-c.\sin v}{\sqrt{(a^2 - 2ab \cos v + b^2)}},$$

und die Gleichung an dieses Loth ist offenbar:

$$y = \frac{b - a \cos v}{a - b \cos v} \cdot x.$$

Die Axen-Coordinaten des Durchschnittspunktes L sind ferner bestimmt durch die Formeln:

$$x = \frac{-c\,(a - b \cos v)}{a^2 - 2ab \cos v + b^2} \text{ und } y = \frac{-c\,(b - a \cos v)}{a^2 - 2ab \cos v + b^2}.$$

Sind arc (tng = p) und arc (tng = q) die Axen-Coordinaten für das Centrum eines Hauptkreises, so ist die Gleichung an denselben:

$$1 + (p + q \cos v).x + (q + p \cos v).y = o;$$

und soll sie mit der Gleichung $ax + by + c = o$ an die Gerade AB zusammenfallen, so ist offenbar:

$$p + q \cos v = \frac{a}{c} \text{ und } q + p \cos v = \frac{b}{c},$$

woraus man rückwärts zieht:

$$p = \frac{a - b \cos v}{c.\sin v^2} \text{ und } q = \frac{b - a \cos v}{c.\sin v^2}.$$

Es ist also auch: $\frac{q}{p} = \frac{b - a \cos v}{a - b \cos v}$; die Gleichung an das Loth VL ist also auch: $y = \frac{q}{p} \cdot x$; d. h., das Loth VL geht durch das sphärische Centrum der Linie AB, wie ohnehin bekannt ist.

§. 10.

Wenn eine Gerade durch zwei gegebene Punkte M oder (t, u) und M′ oder (t′, u′) gehen soll, so findet man, wie in der Planimetrie, als Gleichung an die Linie MM′ die folgende:

$$(u' - u) . x - (t' - t) . y = u't - ut'.$$

Wir machen hiervon eine Anwendung zur Ermittelung der Gleichung an eine Gerade MM′, welche auf zwei gegebenen anderen Geraden zugleich senkrecht steht. Es seyen

$$ax + by + c = o \text{ und } a'x + b'y + c' = o$$

die Gleichungen an diese beiden Geraden; ferner sey M das Centrum der ersten und M′ das Centrum der zweiten; denn die Linie MM′ steht offenbar auf den beiden gegebenen Linien zugleich senkrecht. Es ist aber

$$t = \frac{a - b \cos v}{c \sin v^2} \qquad t' = \frac{a' - b' \cos v}{c' \sin v^2}$$

und

$$u = \frac{b - a \cos v}{c \sin v^2} \qquad u' = \frac{b' - a' \cos v}{c' \sin v^2}.$$

Werden diese Werthe benutzt, so erhält man zur Gleichung an die Linie MM' die folgende:

$$Ax + By + C = o,$$

und es ist: $A = (ca' - ac') \cos v + bc' - cb'$,
$B = (bc' - cb') \cos v + (ca' - ac')$,
$C = ab' - ba'$.

Sind arc (tng = p) und arc (tng = q) die Axen-Coordinaten für das Centrum der Linie MM', so ist:

$$p = \frac{A - B \cos v}{C \sin v^2} \quad \text{und} \quad q = \frac{B - A \cos v}{C \sin v^2},$$

$$\text{oder } p = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \quad \text{und} \quad q = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Außerdem ist: $ap + bq + c = o$ und $a'p + b'q + c' = o$; d. h., dieses sphärische Centrum der Linie MM' ist zugleich der Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Linien.

§. 11.

Es ist auch leicht, den Winkel V zu bestimmen, unter welchem sich die beiden gegebenen Linien schneiden, deren Gleichungen, wie vorhin, seyn mögen:

$$ax + by + c = o \text{ und } a'x + b'y + c' = o.$$

Dieser Winkel V ist nämlich entweder dem Bogen MM' in §. 10 gleich, oder er ergänzt ihn zu 180°. Legen wir die letzte Annahme zum Grunde, so ist nach §. 6:

$$\cos V = -\cos MM' =$$

$$= \frac{1 + tt' + uu' + tu' \cos v + ut' \cos v}{\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos v)} . \sqrt{(1 + t'^2 + u'^2 + 2t'u' \cos v)}};$$

und werden hierin die Werthe von t, u, t', u' aus §. 10 substituirt, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos v = \frac{a^2 + b^2 + c^2 \sin v^2 - 2ab \cos v}{c^2 \sin v^2},$$

$$1 + t'^2 + u'^2 + 2t'u' \cos v = \frac{a' + b'^2 + c'^2 \sin v^2 - 2a'b' \cos v}{c'^2 \sin v^2},$$

$$1 + tt' + uu' + tu' \cos v + ut' \cos v =$$

$$= \frac{aa' + bb' + cc' \sin v^2 - ab' \cos v - ba' \cos v}{cc' \sin v^2}.$$

Daher hat man die folgende allgemeine Formel:

$$\cos V = \frac{-aa' - bb' - cc' \sin v^2 + ab' \cos v + ba' \cos v}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 \sin v^2 - 2ab \cos v)} . \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2 \sin v^2 - 2a'b' \cos v)}}.$$

Auf ähnliche Art, oder auch durch Umformung der vorigen Formel findet man noch:

$$\sin V = \sin v . \sqrt{\frac{(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 - 2\,(ac' - ca')\,(bc' - cb')\cos v}{(a^2 + b^2 + c^2 \sin v^2 - 2ab\cos v)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2 \sin v^2 - 2a'b' \cos v)}},$$

$$\operatorname{tng} V = \frac{\sin v . \sqrt{\left[(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 - 2\,(ac' - ca')\,(bc' - cb')\cos v\right]}}{- aa' - bb' - cc' \sin v^2 + ab' \cos v + ba' \cos v}.$$

Viel einfacher werden diese Ausdrücke, wenn der Axenwinkel v ein rechter ist; sie ziehen sich nun nämlich zusammen auf:

$$\cos V = \frac{- aa' - bb' - cc'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} . \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}},$$

$$\sin V = \sqrt{\frac{(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}},$$

$$\operatorname{tng} V = \frac{\sqrt{[(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2]}}{- aa' - bb' - cc'}.$$

Zusatz. Sollen zwei Gerade auf einander senkrecht stehen, so hat man zwischen den Constanten ihrer Gleichungen die Bedingungsgleichung:

$$aa' + bb' + cc' \sin v^2 = (ab' + ba') \cos v,$$

oder, wenn der Axenwinkel ein rechter ist, die einfachere:

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

§. 12.

Um jetzt in größter Allgemeinheit die Aufgabe aufzulösen, durch einen gegebenen Punkt P oder (m, n) eine Gerade zu ziehen, welche auf einer gegebenen anderen Geraden, deren Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

seyn mag, senkrecht steht, sey $a'x + b'y + c' = 0$ die gesuchte Gleichung an das Perpendikel. Zu ihrer Bestimmung haben wir die beiden Gleichungen:

$$a'm + b'n + c' = 0,$$

$$aa' + bb' + cc' \sin v^2 - ab' \cos v - ba' \cos v = 0;$$

woraus man zieht:

$$\frac{a'}{c'} = \frac{nc \sin v^2 - b + a \cos v}{m\,(b - a \cos v) - n\,(a - b \cos v)},$$

$$\frac{b'}{c'} = \frac{a - b \cos v - mc . \sin v^2}{m\,(b - a \cos v) - n\,(a - b \cos v)}.$$

Es ist demnach die gesuchte Gleichung an das durch den Punkt P gehende Perpendikel:

$$(nc \sin v^2 - b + a \cos v) . x - (mc \sin v^2 - a + b \cos v) . y + m\,(b - a \cos v) - n\,(a - b \cos v) = 0.$$

Sie läßt sich auch unter die folgende Form bringen:

$$y-n=\frac{b-a\cos v-nc\sin v^2}{a-b\cos v-mc\sin v^2}\cdot(x-m)\cdot$$

Für $v=90^\circ$ hat man die einfacheren Gleichungen:

$$(nc-b)\,.\,x-(mc-a)\,.\,y+mb-na=o$$

$$\text{und } y-n=\frac{nc-b}{mc-a}\cdot(x-m)\cdot$$

§. 13.

Um nun auch noch den Durchschnittspunkt P' oder (m', n') des Perpendikels und seine Länge $PP' = r$ zu bestimmen, setzen wir zur Abkürzung:

$$A=-am-bn-c,$$
$$p=b-a\cos v-nc\sin v^2,$$
$$q=a-b\cos v-mc\sin v^2.$$

Es ist dann $m'=m+\dfrac{Aq}{aq+bp}$ und $n'=n+\dfrac{Ap}{aq+bp}$,

und also nach §. 6:

$$\operatorname{tng} r=\frac{\sqrt{\left[\begin{array}{r}(m'-m)^2+2(m'-m)(n'-n)\cos v+(n'-n)^2+\\(mn'-nm')^2\sin v^2\end{array}\right]}}{1+mm'+nn'+mn'\cos v+nm'\cos v},$$

oder auch $\operatorname{tng} r=\dfrac{A\,.\sqrt{(p^2+2pq\cos v+q^2+(pm-qn)^2\sin v^2)}}{(1+m^2+n^2+2mn\cos v)(aq+bp)+A(mq+np+pm\cos v+qn\cos v)}$.

Aber dieser Ausdruck gestattet noch viele Reductionen, wenn darin für p und q die Werthe substituirt werden, und nachdem sie alle vollführt sind, hat man zum Zähler:

$$A\sin v\,.\sqrt{[(1+m^2+n^2+2mn\cos v)(a^2-2ab\cos v+b^2+c^2\sin v^2)-A^2\sin v^2]},$$

und der Nenner reducirt sich auf:

$$(1+m^2+n^2+2mn\cos v)(a^2-2ab\cos v+b^2+c^2\sin v^2)-A^2\sin v^2;$$

daher hat man denn:

$$\operatorname{tng} r=\frac{A\,.\sin v}{\sqrt{[(1+m^2+n^2+2mn\cos v)(a^2-2ab\cos v+b^2+c^2\sin v^2)-A^2\sin v^2]}},$$

oder endlich:

$$\sin r=\frac{\mp(am+bn+c)\,.\sin v}{\sqrt{(1+m^2+n^2+2mn\cos v)}\,.\sqrt{(a^2-2ab\cos v+b^2+c^2\sin v^2)}}.$$

Werden endlich in den Ausdrücken für m' und n' ebenfalls die Werthe von p und q substituirt, so erhält man:

$$m'=m-\frac{(am+bn+c)(a-b\cos v-mc\sin v^2)}{a^2-2ab\cos v+b^2-(ma+nb)\,.\sin v^2},$$

$$n' = n - \frac{(am+bn+c)\,(b-a\cos v-nc\sin v^2)}{a^2-2\,ab\cos v+b^2-(ma+nb)\,.\,c\,.\sin v^2}.$$

Ist der Axenwinkel v ein rechter, so hat man die speciellen Formeln:

$$\sin r = \frac{\pm(am+bn+c)}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}\,.\,\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},$$

$$m' = m - \frac{(am+bn+c)\,(a-mc)}{a^2+b^2-(ma+nb)\,.\,c} \text{ und } n' = n - \frac{(am+bn+c)\,(b-nc)}{a^2+b^2-(ma+nb)\,.\,c}.$$

§. 14.

Soll die durch den Punkt P gehende Gerade auf der gegebenen nicht senkrecht stehen, sondern sie in einem Punkte V unter einem willkürlichen Winkel φ treffen, so hat man, wenn die Länge von PV durch ϱ bezeichnet wird, offenbar $\sin\varrho\,.\,\sin\varphi = \sin r$, und also rückwärts:

$$\sin\varrho = \frac{\sin r}{\sin\varphi}.$$

Dieses kann benutzt werden, um mit Leichtigkeit eine andere Aufgabe aufzulösen. Es seyen zwei gerade Linien gegeben, man soll die Gleichung an eine dritte Gerade finden, welche den Winkel der beiden ersten halbirt.

Sind nämlich $ax+by+c=o$ und $a'x+b'y+c'=o$ die beiden gegebenen Gleichungen, und ist V ihr Durchschnittspunkt, so geht die gesuchte Gerade offenbar auch durch ihn, und ist P ein zweiter Punkt derselben, so hat man, wenn die Hälfte des zu halbirenden Winkels mit φ bezeichnet wird, offenbar:

$$\sin PV = \pm\frac{\sin v}{\sin\varphi}\cdot\frac{ax+by+c}{\sqrt{(1+x^2+y^2+2\,xy\cos v)}\sqrt{(a^2-2\,ab\cos v+b^2+c^2\sin v^2)}},$$

$$\sin PV = \pm\frac{\sin v}{\sin\varphi}\cdot\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{(1+x^2+y^2+2\,xy\cos v)}\,.\,\sqrt{(a'^2-2\,a'b'\cos v+b'^2+c'^2\sin v^2)}}.$$

Werden diese Ausdrücke, worin der Punkt P mit (x, y) bezeichnet worden ist, identificirt, so erhält man:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{(a^2-2\,ab\cos v+b^2+c^2\sin v^2)}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{(a'^2-2\,a'b'\cos v+b'^2+c'^2\sin v^2)}}.$$

Die Zweideutigkeit rührt offenbar daher, daß die Linie PV eben sowohl den einen als den anderen von den beiden Winkeln halbiren kann, unter welchen sich die beiden gegebenen Linien schneiden.

Eine von dieser Gleichung wenig verschiedene andere erhält man, wenn die gesuchte Gerade den Winkel, unter welchem sich die

gegebenen Linien schneiden, nicht halbiren, sondern so theilen soll, daß die Sinus der Theile ein gegebenes Verhältniß haben. Man erhält dann nämlich die Gleichung:

$$\frac{m\,(ax+by+c)}{\sqrt{(a^2-2ab\cos v+b^2+c^2\sin v^2)}}=\pm\frac{n\,(a'x+b'y+c')}{\sqrt{(a'^2+2a'b'\cos v+b'^2+c'^2\sin v^2)}},$$

wenn das Verhältniß der Sinus der Theile des Winkels durch $\frac{m}{n}$ bezeichnet wird.

Zusatz. Sind, z. B. in Fig. 3, die Linien VA und VB die gegebenen, welche sich unter den Winkeln AVB und A'VB schneiden, und theilt die Linie VC den ersten Winkel, und VD seine Nebenwinkel so, daß

$$\frac{\sin AVC}{\sin BVC}=\frac{\sin A'VD}{\sin BVD}=\frac{\sin AVD}{\sin BVD}=\frac{m}{n},$$

so sind VC und VD die beiden gesuchten Linien, und die vier Linien VA, VB, VC, VD haben eine solche Lage, daß jede fünfte von ihnen harmonisch getheilt wird. Ist ACBD eine fünfte Linie, und wird von V aus das Loth Vv auf sie gefällt, so ist offenbar:

$$\frac{\sin AC\,.\sin Vv}{\sin BC\,.\sin Vv}=\frac{\sin VA\,.\sin VC\,.\sin AVC}{\sin VB\,.\sin VC\,.\sin BVC},$$

oder einfacher $\frac{\sin AC}{\sin BC}=\frac{m}{n}\cdot\frac{\sin VA}{\sin VB}$. Ganz eben so findet man aber:

$$\frac{\sin AD}{\sin BD}=\frac{m}{n}\cdot\frac{\sin VA}{\sin VB},$$

und es ist also $\sin AC\,.\sin BD=\sin BC\,.\sin AD$, wodurch die harmonische Theilung der Linie ACBD ausgedrückt wird.

§. 15.

Um den Gebrauch der vorigen Formeln durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehmen wir im Dreiecke ABC [Fig. 4] die Grundlinie AB zur ersten Axe, und das auf sie gefällte Perpendikel Cc zur zweiten Axe, also c zum Anfangspunkte. Setzen wir weiter cA $=\alpha$, cB $=\beta$ und cC $=\gamma$, so sind

$$\cot\beta\,.x+\cot\gamma\,.y=1,$$
$$-\cot\alpha\,.x+\cot\gamma\,.y=1$$

die Gleichungen an die Linien BC und AC; die Gleichungen an die Perpendikel Aa, Bb sind daher nach einer geringen Umformung:

$$-\cot\alpha\,.\,x+\frac{(\cot\beta\,.\,\cot\alpha-1)}{\cot\gamma}\,.\,y-1=o,$$

$$-\cot.\beta\,.\,x+\frac{(1-\cot\beta\ \cot\alpha)}{\cot\gamma}\,.\,y+1=o;$$

die Addition dieser Gleichungen gibt: $x=o$; d. h., es schneiden sich die Perpendikel Aa und Bb auf der zweiten Axe oder auf dem dritten Perpendikel Cc.

Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende Art: Man beweiset leicht in Anwendung der einfachen das rechtwinkelige Dreieck betreffenden Formeln die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$\frac{\cos Ac}{\cos Bc}\cdot\frac{\cos Ba}{\cos Ca}\cdot\frac{\cos Cb}{\cos Ab}=1,$$

$$\frac{\operatorname{tng} Ac}{\operatorname{tng} Bc}\cdot\frac{\operatorname{tng} Ba}{\operatorname{tng} Ca}\cdot\frac{\operatorname{tng} Cb}{\operatorname{tng} Ab}=1;$$

durch Multiplication derselben erhält man die folgende dritte:

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc}\cdot\frac{\sin Ba}{\sin Ca}\cdot\frac{\sin Cb}{\sin Ab}=1,$$

und eine Folge hiervon endlich ist, daß die drei Perpendikel Aa, Bb, Cc, welche von den Ecken eines Dreiecks auf seine Gegenseiten gefällt werden, sich in einem Punkte M schneiden.

§. 16.

Wenn die beiden Axen von einer Geraden AB in den Entfernungen $VA=A$ und $VB=B$ vom Anfangspunkte geschnitten werden und ein Punkt M die Linie AB so theilt, daß

$$\frac{\sin AM}{\sin BM}=\frac{m}{n}$$

ist, so hat man, wenn die Axen-Coordinaten des Punktes M bezeichnet werden mit t und u, nach §. 8 die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin(A-t)}{\cos b\,.\,\sin t}\ \text{und}\ \frac{m}{n}=\frac{\sin(B-u)}{\cos A\,.\,\sin y}.$$

Werden diese entwickelt, und wird $\operatorname{tng} t=x$, und $\operatorname{tng} u=y$ gesetzt, so hat man:

$$x=\frac{n\,.\,\sin A}{m\cos B+n\cos A}\ \text{und}\ y=\frac{m\sin B}{m\cos B+n\cos A}.$$

Hieraus zieht man nun: $y=\frac{m\sin B}{n\sin A}\,.\,x$; d. h., wenn die Linie AB andere und andere Lagen erhält, aber so, daß $\frac{\sin B}{\sin A}$ ein constantes Verhältniß ist, so ist der geometrische Ort des Punktes M eine durch den Anfangspunkt V gehende Gerade VM.

Wird $-m$ für m gesetzt, so ist (x, y) ein Punkt M', welcher die Linie AMB in ihrer Verlängerung harmonisch theilt, und der Ort des Punktes M' ist dann eine zweite Gerade VM'.

In dem besondern Falle, daß $m = n$ ist, wird die Linie AB vom Punkte M halbirt, und man hat dann:

$$x = \frac{\sin A}{\cos B + \cos A} \text{ und } y = \frac{\sin B}{\cos B + \cos A},$$

woraus folgt: $x + y = \operatorname{tng}\left(\frac{A+B}{2}\right)$ und $x - y = \operatorname{tng}\left(\frac{A-B}{2}\right)$;

daher hat man rückwärts:

$$\operatorname{tng} A = \frac{2x}{1 - x^2 + y^2} \text{ und } \operatorname{tng} B = \frac{2y}{1 + x^2 - y^2}.$$

Ist also ein Punkt M gegeben, welcher eine zwischen die Axen zu stellende Gerade AB halbiren soll, so ist die Lage dieser Geraden durch die vorigen Formeln bestimmt, welche, wie man sieht, von der Größe des Axenwinkels v unabhängig sind, aber gleichwohl nicht den Grad von Einfachheit haben, wie die analogen in der Planimetrie.

§. 17.

Wenn drei gerade Linien AB, A'B', A''B'' zwischen die beiden Coordinaten-Axen gestellt sind und von den Punkten M, M', M'' so getheilt werden, daß

$$\frac{\sin AM}{\sin BM} = \frac{\sin A'M'}{\sin B'M'} = \frac{\sin A''M''}{\sin B''M''} = \frac{m}{n}$$

ist, so läßt sich eine Bedingungsgleichung finden für den Fall, daß die drei Punkte M, M', M'' in demselben Hauptkreise liegen sollen. Setzen wir nämlich:

$VA = a$, $VA' = a'$, $VA'' = a''$, $VB = b$, $VB' = b'$, $VB'' = b''$, und ist

$$P . x + Q . y = R$$

die Gleichung an die Linie MM'M'', so hat man, wenn zur Abkürzung gesetzt wird: $A = m \cos b + n \cos a$, $A' = m \cos b' + n \cos a'$, und $A'' = m \cos b'' + n \cos a''$, die drei Gleichungen:

$$P . n \sin a + Q . m \sin b = R . A,$$
$$P . n \sin a' + Q . m \sin b' = R . A',$$
$$P . n \sin a'' + Q . m \sin b'' = R . A'';$$

die Elimination von P, Q, R aus ihnen führt zu der folgenden:

$$\frac{A \sin a'' - A'' \sin a}{\sin b \sin a'' - \sin b'' \sin a} = \frac{A \sin a' - A' \sin a}{\sin b \sin a' - \sin b' \sin a};$$

durch weitere Entwickelung und Reduction erhält man die Formel:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin b . \sin(a'' - a') - \sin b' \sin(a'' - a) + \sin b'' \sin(a' - a)}{\sin a . \sin(b'' - b') - \sin a' \sin(b'' - b) + \sin a'' \sin(b' - b)}.$$

zum Ausdruck der Bedingung, welche die drei Linien AB, A'B', A"B" durch ihre Lage erfüllen müssen, wenn die Theilpunkte M, M', M" derselben in einer sphärisch-geraden Linie liegen sollen.

Von der Coordinaten-Verwandlung beim Gebrauche der Axen-Coordinaten.

§. 18.

Die Coordinaten-Verwandlung bietet in der analytischen Sphärik ungleich größere Schwierigkeiten dar, als in der Planimetrie, sobald die Lage des Anfangspunktes verändert werden soll. Daher theilen wir die vorgelegte allgemeine Aufgabe, indem wir sie zuerst für den Fall auflösen, daß der Anfangspunkt unverändert bleibt, dagegen die beiden Axen in andere Richtungen verlegt werden.

Es seyen VX = 90° und VY = 90° die ursprünglichen Axen, und der Axenwinkel XVY = XY = v [Fig. 5.]; die neuen Axen seyen VX' = 90° und VY' = 90°; der neue Axenwinkel also sey X'VY' = X'Y' = v'. Ferner sey der Winkel XVX' = α und YVY' = β, also:

$$v - \alpha = v' - \beta;$$

die ursprünglichen Axen-Coordinaten des Punktes M seyen VP und VQ; die neuen Axen-Coordinaten sind dann VP' und VQ'. Es sey daher:

tng VP = x, tng VQ = y, tng VP' = x' und tng VQ' = y'.

Es werde auch noch VM gezogen und es sey: tng VM = z.

Wird weiter der Winkel MVP = m und MVQ = n gesetzt, so ist nach §. 4:

$$\sin n = \frac{x \sin v}{z}, \qquad \cos n = \frac{y + x \cos v}{z},$$

$$\sin m = \frac{y \sin v}{z}, \qquad \cos m = \frac{x + y \cos v}{z},$$

$$\sin(n+\beta) = \frac{x' \sin v'}{z}, \qquad \cos(n+\beta) = \frac{y' + x' \cos v'}{z},$$

$$\sin(m-\alpha) = \frac{y' \sin v'}{z}, \qquad \cos(m-\alpha) = \frac{x' + y' \cos v'}{z}.$$

Hiernach hat man nun: $\frac{x'}{z} = \frac{\sin n \cos \beta + \cos n \sin \beta}{\sin v'}$

und $\frac{y'}{z} = \frac{\sin m \cos \alpha - \cos m \sin \alpha}{\sin v'}$.

Werden hierin für sin m, sin n, cos m, cos n die Werthe substituirt, so gibt eine einfache Reduction die Ausdrücke:

$$x' = \frac{x \cdot \sin(v+\beta) + y \sin\beta}{\sin v'},$$

$$y' = \frac{y \cdot \sin(v-\alpha) - x \cdot \sin\alpha}{\sin v'};$$

wodurch die neuen Axen-Coordinaten mittelst der ursprünglichen ausgedrückt sind. Umgekehrt hat man:

$$\frac{x}{z} = \frac{\sin(n+\beta-\beta)}{\sin v} = \frac{\sin(n+\beta)\cos\beta - \cos(n+\beta)\sin\beta}{\sin v},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin(m-\alpha+\alpha)}{\sin v} = \frac{\sin(m-\alpha)\cos\alpha + \cos(m-\alpha)\sin\alpha}{\sin v};$$

und werden hierin für $\sin(n+\beta)$, $\cos(n+\beta)$, $\sin(m-\alpha)$, $\cos(m-\alpha)$ die Werthe substituirt, so hat man die umgekehrten Ausdrücke:

$$x = \frac{x' \sin(v'-\beta) - y' \sin\beta}{\sin v},$$

$$y = \frac{y' \sin(v'+\alpha) + x' \sin\alpha}{\sin v},$$

welche sammt den vorigen die größte Aehnlichkeit haben mit den correspondirenden planimetrischen.

§. 19.

Nicht so verhält es sich, wenn bei der vorzunehmenden Coordinaten-Verwandlung auch die Lage des Anfangspunktes verändert werden soll. Sind in Fig. 6 VX und VY die ursprünglichen Axen, worauf der Punkt M oder (x, y) bezogen ist, und sind $V'X'$ und $V'Y'$ die neuen Axen, auf welche derselbe Punkt M oder (x', y') bezogen werden soll, so verbinde man die beiden Anfangspunkte durch eine Linie $VV' = e$, deren unbestimmte Verlängerung $V'Z$ seyn mag. Wir bestimmen die Richtungen der beiden Axenpaare durch die vier Winkel $ZVX = m$, $ZVY = n$, $ZV'X' = m'$ und $Zv'y' = n'$; der ursprüngliche Axenwinkel ist dann $v = m + n$ und der neue ist $v' = m' + n'$.

Die Lage des neuen Anfangspunktes V' gegen die beiden ursprünglichen Axen ist offenbar bestimmt durch die drei Größen m, n, e.

Um nun ohne lange arithmetische Entwickelungen zu den Formeln zu gelangen, wodurch die Größen x und y durch x' und y' ausgedrückt werden können, nehmen wir ein rechtwinkeliges Coordinaten-System zur Vermittelung. Es seyen VP und VQ die rechtwinkeligen Axen-Coordinaten des Punktes M für den Anfangspunkt V, und eben so seyen $V'P = t$ und $V'R = u$ die rechtwinkeligen Axen-Coordinaten desselben Punktes M für den Anfangspunkt V'. Daher ist: $VP = e + t$, und nach §. 3 ist: $\text{tng } PM = \text{tng } VQ \cdot \cos VP = \text{tng } V'R \cdot \cos V'P$,

oder: $\operatorname{tng} VQ = \frac{\operatorname{tng} u \,.\, \cos t}{\cos (e+t)}$;

durch eine geringe Umformung erhalten wir also:

$$\operatorname{tng} VP = \frac{\sin e + \cos e \,.\, \operatorname{tng} t}{\cos e - \sin e \,.\, \operatorname{tng} t} \text{ und } \operatorname{tng} VQ = \frac{\operatorname{tng} u}{\cos e - \sin e \,.\, \operatorname{tng} t}.$$

Es ist nun aber nach §. 18:

$$x \,.\, \sin (m+n) = \operatorname{tng} VP \,.\, \sin n - \operatorname{tng} VQ \cos n \text{ und}$$
$$y \,.\, \sin (m+n) = \operatorname{tng} VP \,.\, \sin m + \operatorname{tng} VQ \cos m.$$

Werden hierin die Werthe substituirt, so erhält man:

$$x \,.\, \sin (m+n) = \frac{\sin n \sin e + \sin n \cos e \operatorname{tng} t - \cos n \operatorname{tng} u}{\cos e - \sin e \,.\, \operatorname{tng} t},$$

$$y \,.\, \sin (m+n) = \frac{\sin m \,.\, \sin e + \sin m \cos e \operatorname{tng} t + \cos m \operatorname{tng} u}{\cos e - \sin e \operatorname{tng} t}.$$

Es ist aber weiter nach §. 18:

$\operatorname{tng} t = x' \cos m' + y' \cos n'$ und $\operatorname{tng} u = y' \sin n' - x' \sin m'$, und werden auch noch diese Werthe benutzt, so erhält man die beiden folgenden allgemeinsten Formeln für die Coordinaten-Verwandlung:

$$x \,.\, \sin v = \frac{\sin e \sin n + [\sin n \cos m' \cos e + \cos n \sin m'] \,.\, x' + [\sin n \cos n' \cos e - \cos n \sin n'] \,.\, y'}{\cos e - \sin e \cos m' \,.\, x' - \sin e \cos n' \,.\, y'},$$

$$y \,.\, \sin v = \frac{\sin e \sin m + [\sin m \cos n' \cos e + \cos m \sin n'] \,.\, y' + [\sin m \cos m' \cos e - \cos m \sin m'] \,.\, x'}{\cos e - \sin e \cos n' \,.\, y' - \sin e \,.\, \cos m' \,.\, x'}.$$

Es hätte offenbar hingereicht, die eine dieser beiden Formeln also herzuleiten; denn aus der einen findet man die andere, wenn man gleichzeitig x mit y, x' mit y', m' mit n' und m mit n vertauscht.

Wird der neue Anfangspunkt V' mit (a, b) bezeichnet, so ist:

$$a = \frac{\operatorname{tng} e \,.\, \sin n}{\sin v} \text{ und } b = \frac{\operatorname{tng} e \,.\, \sin m}{\sin v},$$

und werden diese Ausdrücke benutzt, so findet man auch noch:

$$x = a + \frac{[\sin n \cos m' + \cos n \sin m' \cos e]\, x' + [\sin n \cos n' - \cos n \sin n' \cos e] \,.\, y'}{\cos e \sin v\, [\cos e - \sin e \cos m' \,.\, x' - \sin e \cos n' \,.\, y']},$$

$$y = b + \frac{[\sin m \cos n' + \cos m \sin n' \cos e] \,.\, y' + [\sin m \cos m' - \cos m \sin m' \cos e] \,.\, x'}{\cos e \sin v\, [\cos e - \sin e \cos n' \,.\, y' - \sin e \cos m' \,.\, x']}.$$

Setzt man in den erhaltenen Formeln $-e$ für e; x' für x und y' für y, so erhält man umgekehrt x' und y' ausgedrückt durch x und y. Es versteht sich von selbst, daß dabei auch m' mit m und n' mit n vertauscht werden muß.

Von den gesetzlichen sphärischen Linien überhaupt.

§. 20.

Wenn eine Gleichung zwischen den Axen-Coordinaten des Punktes M irgend einer Curve gegeben ist, welche wir durch $\psi(t, u) = o$ andeuten, so läßt sich diese Gleichung immer umformen in eine Gleichung $\varphi(x, y) = o$, indem man setzt $x = \operatorname{tng} t$ und $y = \operatorname{tng} u$, und wir haben, wenigstens bei den die sphärisch-geraden Linien betreffenden Beziehungen, gesehen, daß nach einer solchen Substitution die Formeln, wodurch jene Beziehungen ausgedrückt werden, nicht nur in der einfachsten Form erscheinen, sondern auch außerdem noch die größte Uebereinstimmung mit den correspondirenden Formeln der Planimetrie erhalten.

Gelangt man durch diese Substitutionen zu einer so genannten algebraischen Gleichung $\varphi(x, y) = o$ zwischen x und y, so können wir die zugehörige Curve selbst eine algebraische nennen, und die Gleichung wird unter die folgende allgemeinste Form fallen:

$$ay^n + bxy^{n-1} + cx^2 . y^{n-2} \ldots + gx^n \ldots . + py + qx + r = o,$$

in welcher der Grad n der höchsten Potenz von y übereinstimmt mit dem Grade der höchsten Potenz von x.

Wenn diese Gleichung nicht ein Produkt von Gleichungen niedrigerer Grade darstellt, so nennen wir die Curve eine Linie der nten Ordnung, weil sie von einem Hauptkreise höchstens in 2n Punkten, oder wenn wir von den Gegenpunkten absehen, in n Punkten geschnitten werden kann, wie auf der Stelle erhellet, wenn man jene Gleichung mit der Gleichung

$$a' x + b' y + c' = o$$

an einen Hauptkreis zusammenhält. Man wird auch nur die genannten n Punkte als Durchschnittspunkte ansehen; denn ihre eben so vielen Gegenpunkte gehören nicht der vorgelegten Curve, sondern ihrer symmetrischen Gegencurve an, und können darum außer Betracht bleiben. Selbst von diesen n Durchschnittspunkten können hier, wie in der Planimetrie, einige zusammenfallen, andere gar unmöglich werden.

Wenn man weiter, um die allgemeinste Coordinaten-Verwandlung vorzunehmen, substituirt nach §. 19:

$$x = \frac{A + Bx' + Cy'}{L + Mx' + Ny'} \text{ und } y = \frac{A' + B'x' + C'y'}{L + Mx' + Ny'},$$

so geht die obige Gleichung durch diese Substitution über in eine Gleichung zwischen x' und y', welche in Ansehung jeder von diesen beiden Größen wieder vom nten Grade ist. Die bestimmte Ord-

nung also, wozu eine Curve gehört, ist ein Charakter, welcher durch keine Coordinaten-Verwandlung ausgelöscht werden kann.

Die Linien der ersten Ordnung sind also offenbar die Hauptkreise, weil ihre Gleichungen die folgende Form haben: $ay + bx + c = o$.

Die allgemeine Form der Linien der zweiten Ordnung ist weiter:

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + g = o.$$

Kann aber diese Gleichung als ein Produkt von zwei Gleichungen des ersten Grades dargestellt werden, so gehört sie einem Systeme von zwei Hauptkreisen an.

Wenn in einer Gleichung an eine sphärische Linie die Axen-Coordinaten nicht vorkommen, so muß sie jedesmal in eine Gleichung zwischen $x = tng\ t$ und $y = tng\ u$ umgeformt werden, ehe über die Ordnung, zu welcher die algebraische Linie gehört, mit Sicherheit geurtheilt werden kann. Denn ist, z. B., $z = a$ die Gleichung an eine Linie, und bezeichnet arc $(tng = z)$ die einer unbestimmten Abscisse zugehörige senkrechte Applicate, so gehört die Linie gleichwohl nicht zu der ersten Ordnung; denn wenn man nach §. 3 substituirt $z = tng\ u . cos\ t$, so hat man die Gleichung $tng\ u = a\,(1 + tng\ t^2)$, oder auch:

$$y^2 - a^2x^2 - a^2 = o;$$

woraus man sieht, daß die Linie zur zweiten Ordnung gehört; sie ist bekanntlich ein Nebenkreis, welcher dem zur ersten Axe genommenen Hauptkreise parallel ist.

Wenn die durch Substitution erhaltene oder schon gegebene Gleichung $\varphi\ (x, y) = o$ keine so genannte algebraische ist, so kann man die Curve eine transscendente nennen, und es können Fälle eintreten, in denen der Gebrauch der Abscissen und zugehörigen Applicaten bei einem rechtwinkeligen Coordinaten-Systeme dem der Axen-Coordinaten vorzuziehen ist. Zwei Beispiele dieser Art werden später behandelt werden. Auch bei den algebraischen Linien kann der Gebrauch der Abscissen und rechtwinkeligen Applicaten die Untersuchung der Linien oft erleichtern.

Soll aber das Coordinaten-System schiefwinkelig seyn, so wird man, statt nach den Applicaten zu greifen, sich wohl im Allgemeinen lieber der Applicatenverhältnisse bedienen, um erträgliche Formeln zu erhalten.

§. 21.

Betrachten wir zwei Curven, die auf dasselbe Coordinaten-System bezogen sind und einen Punkt M gemein haben. Ihre Gleichungen mögen seyn: $\varphi\ (x, y) = o$ und $\psi\ (x, z) = o$. Im Punkte M haben die Curven offenbar dieselben Axen-Coordinaten $x = x$ und $z = y$.

Ein zweiter Punkt P in der ersten Curve habe zu Axen-Coordinaten arc ($tng = x + \Delta x$) und arc ($tng = y + \Delta y$); ein zweiter Punkt Q in der zweiten Curve habe zu Axen-Coordinaten arc ($tng = x + \Delta x$) und arc ($tng = z + \Delta z$). Der Abstand der beiden Punkte P und Q von einander läßt sich nun nach §. 6 ausdrücken, und bedenkt man, daß $z = y$ ist, so findet man:

$$tng\ \widetilde{PQ} = \pm (\Delta y - \Delta z) . \frac{\sqrt{[1 + (x + \Delta x)^2 . \sin v^2]}}{1 + (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta z)(y + \Delta y) + (x + \Delta x)(2y + \Delta y + \Delta z) \cos v},$$

oder, wenn man den Bruchfactor nach steigenden Potenzen von Δx entwickelt:

$$tng\ PQ = \pm (\Delta y - \Delta z) . (S + T . \Delta x + U . \Delta x^2 \ldots).$$

Das von Δx unabhängige Glied dieser Entwickelung ist am einfachsten zu bestimmen; es ist nämlich:

$$S = \frac{\sqrt{(1 + x^2 \sin v^2)}}{1 + x^2 + y^2 + 2xy \cos v},$$

woraus man sieht, daß S nur dann $= 0$ ist, wenn $x = \frac{1}{0}$ oder $y = \frac{1}{0}$ ist, d. h., wenn der Punkt M in der Cardinale des Coordinaten-Systems liegt. Abgesehen von dem Grenzfalle ist S nie gleich Null.

Um aus dem Ausdrucke für tng PQ gehörige Folgerungen zu ziehen, wird als bekannt vorausgesetzt, daß, wenn tng PQ durch eine Reihe von der Form $tng\ PQ = \alpha . \Delta x^n + \beta . \Delta x^{n+1} + \gamma . \Delta x^{n+2} + \delta . \Delta x^{n+3} +$ 2c. ausgedrückt wird, auch der Bogen PQ selbst, wenn sein Radius als Einheit dient, ausgedrückt werde durch eine Reihe von derselben Form, nämlich:

$$PQ = \alpha' . \Delta x^n + \beta' . \Delta x^{n+1} + \gamma' . \Delta x^{n+2} + \delta' . \Delta x^{n+3} + \text{2c.},$$

und daß außerdem $\alpha' = \alpha$ sey.

Aber aus der Gleichung $\varphi\,(x, y) = 0$ findet man in Anwendung des Taylor'schen Satzes:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} . \frac{\Delta x^3}{6} + \text{2c.};$$ und eben so findet man aus der Gleichung $\psi\,(x, z)$ die Reihe:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} . \frac{\Delta x^3}{6} + \text{2c.}$$

Daher hat man denn:

$$tng\ PQ = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) . \Delta x + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) . \frac{\Delta x^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) . \frac{\Delta x^3}{6} \ldots\right] . \left(S + T . \Delta x + U \Delta x^2 \ldots\right),$$

Nehmen wir nun an, daß S nicht Null ist, so hat tng PQ und also auch PQ selbst so lange die Form $\alpha.\Delta x+\beta.\Delta x^2+\gamma.\Delta x^3+$ ꝛc., als $\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}$ nicht $=0$ ist. Wenn aber $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}$ ist, so hat tng PQ und also auch PQ selbst die Form $\beta\Delta x^2+\gamma.\Delta x^3+\delta.\Delta x^4+$ ꝛc.; wenn außerdem noch $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist, so hat PQ die Form $\gamma.\Delta x^3+\delta.\Delta x^4+$ ꝛc.; u. s. w.

Wenn also für denselben Werth von x auch $z=y$ und $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$ ist, so haben die beiden Curven eine **Berührung des ersten Grades**; wenn außerdem noch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$ ist, so ist der **Contact vom zweiten Grade**; wenn selbst noch $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ ist, so ist die **Berührung der beiden Curven im Punkte M vom dritten Grade**; u. s. w.

Wenn aber der gemeinschaftliche Punkt M der beiden Curven in der Cardinale des Coordinaten-Systems liegt, so gelten die vorigen Schlüsse nicht unbedingt, sondern es kann nun die Berührung der Curven von noch höherem Grade seyn.

§. 22.

Betrachten wir vorläufig eine Gerade, deren Gleichung $at+bu+c=0$ seyn mag und die eine Curve in einem Punkte M berühren soll, deren Gleichung $\varphi(x, y)=0$ seyn soll, so haben wir als erste Bedingung:

$$ax+by+c=0,$$

oder auch $a(t-x)=b(y-u)$, und als zweite Bedingung: $a\partial x+b\partial y=0$; daher ist die Gleichung an die durch M gehende Berührungslinie:

$$u-y=\frac{\partial y}{\partial x}(t-x),$$

oder $u-y=p(t-x)$, wenn das Differenzialverhältniß $\frac{\partial y}{\partial x}$, aus der Gleichung $\varphi(x, y)=0$ an die Curve gezogen, durch p bezeichnet wird.

Daraus findet man leicht die Gleichung an die durch M gehende Normale nach §. 12, wenn man in der dortigen Gleichung $y-n=\frac{nc-b}{mc-a}(x-m)$, welche sich auf ein rechtwinkeliges Coordinaten-System beziehet, setzt: u für y; t für x; y für n; x für m; p für a; -1 für b und $y-px$ für c. Dadurch erhält man aber die Gleichung:

$$u - y = \frac{y^2 - pxy + 1}{xy - px^2 - p}(t - x).$$

Die für jeden anderen Axenwinkel v geltende allgemeinere Formel ist etwas zusammengesetzter.

Man kann der vorigen Gleichung an die Normale auch die folgende Gestalt geben:

$$t\,[1 + y^2 - pxy] + u\,[p + px^2 - xy] = x + py.$$

Diese Gleichungen werden wir später auf andere Art wieder finden.

§. 23.

Setzen wir in der Gleichung $u - y = p\,(t - x)$ an die Tangente, welche bei jedem Axenwinkel gilt, $t = x + \Delta x$ und $u = y + \Delta u$, so ist offenbar: $\Delta u = p\,.\,\Delta x$, und es sind nun arc $(\mathrm{tng} = x + \Delta x)$ und arc $(\mathrm{tng} = y + \Delta u)$ oder arc $(\mathrm{tng} = y + p\,.\,\Delta x)$ die Axen-Coordinaten eines Punktes N der Berührungslinie. Wird sein Abstand NM vom Berührungspunkte mit ΔS bezeichnet, so haben wir nach §. 6:

$$\frac{\sin \Delta s}{\Delta x} = \sqrt{\frac{1 + 2\,p\,\cos v + (y - px)^2 \sin v^2 + p^2}{(1 + x^2 + y^2 + 2xy \cos v)(1 + (y + \Delta u)^2 + (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)(y + \Delta u)\cos v)}}.$$

Gehen wir zu den Grenzen über, so verwandelt sich $\frac{\sin \Delta s}{\sin \Delta x}$ in das Differenzialverhältniß $\frac{\partial s}{\partial x}$ des Bogens der Curve, und es ist also:

$$\partial s = \frac{\partial x \sqrt{(1 + 2\,p\,\cos v + p^2 + (y - px)^2 \sin v^2)}}{1 + x^2 + y^2 + 2\,x\,y\,\cos v},$$

oder, wenn man für p den Werth $\frac{\partial y}{\partial x}$ substituirt:

$$\partial s = \frac{\sqrt{(\partial x^2 + 2\,\partial x . \partial y \cos v + \partial y^2 + (y\,\partial x - x\,\partial y)^2 . \sin v^2)}}{1 + x^2 + y^2 + 2\,x\,y\,\cos v}.$$

Wird der Abstand des Punktes M oder (x, y) der Curve vom Anfangspunkte V mit ϱ bezeichnet, so hat man:

$$1 + x^2 + y^2 + 2xy\cos v = \frac{1}{\cos \varrho^2},$$

und wenn dieser Ausdruck benutzt wird, so ist die Formel:

$$\partial s = \cos \varrho^2 . \sqrt{(\partial x^2 + 2\,\partial x\,.\,\partial y \cos v + \partial y^2 + (y\,\partial x - x\,\partial y)^2 . \sin v^2)}.$$

Wenn der Axenwinkel v ein rechter ist, so zieht sie sich zusammen auf:

$$\partial s = \cos \varrho^2 . \sqrt{(\partial x^2 + (y\partial x - x\partial y)^2 + \partial y^2)},$$

und es ist nun: $\cos \varrho^2 = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$.

§. 24.

Wenn die Lage des Punktes M der Curve bestimmt ist durch eine Abscisse t und senkrechte Applicate u, so ist offenbar nach §. 3:

$$y = \frac{\text{tng}\, u}{\cos t} \text{ und } x = \text{tng}\, t;$$

auch ist: $\cos \varrho = \cos t . \cos u$;

also: $\partial x = \frac{\partial t}{\cos t^2}$ und $\partial y = \frac{\partial u \cos t + \partial t \sin t . \sin u \cos u}{\cos u^2 . \cos t^2}$;

also: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos t . \frac{\partial u}{\partial t} + \sin t \sin u \cos u}{\cos u^2}$;

ferner ist: $y\, \partial x - x\, \partial y = \frac{\partial t . \sin u}{\cos t \cos u} - \frac{\partial u . \sin t}{\cos t^2 . \cos u^2}$, und werden diese Werthe benutzt, so erhält man die folgende einfache Formel:

$$\partial s = \sqrt{(\cos u^2 . \partial t^2 + \partial u^2)}.$$

Sind t′ und u′ die Abscisse und senkrechte Applicate irgend eines Punktes der Berührungslinie, so ist die Gleichung an dieselbe offenbar:

$$\partial y . \text{tng}\, t' - \partial x . \frac{\text{tgn}\, u'}{\cos t'} + y\partial x - x\partial y = o,$$

und verwandelt sich durch die angegebenen Substitutionen in:

$$\text{tng}\, u' = \text{tng}\, u . \cos (t - t') - \frac{\partial u}{\partial t} . \frac{\sin (t - t')}{\cos u^2}.$$

Derjenige Werth t—t′, welcher dem Werthe u′=o entspricht, heißt die Subtangente, und wenn diese mit m bezeichnet wird, so hat man offenbar:

$$\text{tng}\, m = \sin u . \cos u . \frac{\partial t}{\partial u}.$$

Bezeichnet ferner t′ die Abscisse und u′ die zugehörige Applicate irgend eines Punktes der Normale, so findet man zur Gleichung an die Normale:

$$\text{tng}\, u' = \text{tng}\, u . \cos (t - t') + \frac{\partial t}{\partial u} . \sin (t - t').$$

Derjenige Werth t′—t, welcher dem Werthe u′=o entspricht, heißt die Subnormale, und wird sie mit n bezeichnet, so hat man:

$$\text{tng}\, n = \text{tng}\, u . \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Wird der Winkel, welchen die durch M gehende Berührungslinie mit der Applicate dieses Punktes einschließt, durch λ bezeichnet, so ist offenbar: $\text{tng}\, m = \sin u . \text{tng}\, \lambda$, und also:

$$\operatorname{tng} \lambda = \cos u . \frac{\partial t}{\partial u} .$$

Daher hat man denn auch: $\partial s . \cos \lambda = \partial u$.

Zusatz. Ueberhaupt ist $\operatorname{tng} y = \operatorname{tng} y' . \cos (x-x') + a . \sin (x-x')$ die allgemeine Form der Gleichung an einen Hauptkreis, wenn x' und y' die Abscisse und senkrechte Applicate eines gegebenen, hingegen x und y die Abscisse und senkrechte Applicate eines beliebigen anderen Punktes dieses Hauptkreises bezeichnen; a bedeutet eine auf die Richtung des Kreises Bezug habende Constante.

Ist kein Punkt des Hauptkreises gegeben, so ist die Gleichung an ihn: $\operatorname{tng} y = \alpha . \cos x + \beta . \sin x$, worin α und β zwei Constanten bezeichnen.

§. 25.

Aus der im §. 22 gefundenen Gleichung $u-y = \frac{\partial y}{\partial x}(t-x)$ oder auch $\partial y . t - \partial x . u + y\partial x - x\partial y = o$ leiten wir eine allen sphärischen Curven gemeinsame Eigenschaft her, wobei wir uns der Einfachheit wegen rechtwinkeliger Axen-Coordinaten bedienen wollen. Wenn eine Curve im Punkte M berührt wird und man das sphärische Centrum des berührenden Hauptkreises mit M' oder auch mit (x', y') bezeichnet, so ist nach §. 9:

$$x' = \frac{\partial y}{y\partial x - x\partial y} \text{ und } y' = \frac{-\partial x}{y\partial x - x\partial y} .$$

Zu einem anderen Punkt M gehört nun ein anderer Punkt M'; d. h., die Punkte M' gehören einer zweiten Curve an, welche mit der ersten zusammengehört und durch sie bestimmt ist. Ist $\varphi(x, y) = o$ die Gleichung der ersten Curve, so kann man die Gleichung an die zweite, die wir unter $\psi(x', y')$ vorstellen wollen, finden, indem man die beiden Ausdrücke für x' und y', welche Functionen von x und y sind, umkehrt, d. h., indem man x und y durch x' und y' ausdrückt und die für x und y gewonnenen Ausdrücke in der Gleichung $\varphi(x, y) = o$ substituirt, wodurch sie in die Gleichung $\psi(x', y') = o$ übergeht. Da $1 + xx' + yy' = o$, so findet man auch die Gleichung $\psi(x', y') = o$, indem man aus den drei Gleichungen $\varphi(x, y) = o$, $\partial y . t - \partial x . u + y\partial x - x\partial y = o$ und $1 + xx' + yy' = o$ die beiden Größen x und y eliminirt.

Aus den gefundenen Ausdrücken für x' und y' findet man durch Differenziiren:

$$\partial x' = \frac{y(\partial x . \partial^2 y - \partial y . \partial^2 x)}{(y\partial x - x\partial y)^2} \text{ und } \partial y' = \frac{x(\partial y . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y)}{(y\partial x - x\partial y)^2},$$

und also: $\frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{x}{y}$ oder $y\partial y' + x\partial x' = 0$.

Wenn man aber die Gleichung $1 + xx' + yy' = 0$ differenziirt, so erhält man: $x\partial x' + x'\partial x + y\partial y' + y'\partial y = 0$, und wird hiervon die Gleichung $y\partial y' + x\partial x' = 0$ subtrahirt, so bleibt noch: $y'\partial y + x'\partial x = 0$, oder auch:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x'}{y'};$$

und hieraus sieht man, daß die Beziehung der beiden Curven zu einander eine reciproke ist. Noch deutlicher tritt diese Eigenschaft hervor, wenn man aus der Gleichung $\partial y'.\, t - \partial x'.\, u + y'\partial x' - x'\partial y' = 0$ an die Berührungslinie der zweiten Curve ihr sphärisches Centrum bestimmt, welches wir mit N oder auch mit (α, β) bezeichnen. Man findet nämlich wie vorhin:

$$\alpha = \frac{\partial y'}{y'\partial x' - x'\partial y'} \text{ und } \beta = \frac{-\partial x'}{y'\partial x' - x'\partial y'},$$

und wird hierin das Differenzialverhältniß $\frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{x}{y}$ substituirt, so erhält man: $\alpha = \frac{-x}{xx' + yy'} = x$ und $\beta = \frac{-y}{xx' + yy'} = y$; d. h., es fällt der Punkt N mit M zusammen.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist endlich, daß eine Normale der einen Curve für den Punkt M durch den Punkt M' der anderen Curve geht und zugleich eine Normale für sie ist.

Die Gleichung an die Normale der ersten Curve ist:

$$(y^2\partial x - xy\partial y + \partial x).\, t - (xy\partial x - x^2\partial y - \partial y).\, u = y\partial y + x\partial x;$$

und die Gleichung an die Normale der zweiten Curve ist:

$$(y'^2\partial x' - x'y'\partial y' + \partial x').\, t - (x'y'\partial x' - x'^2\partial y' - \partial y').\, u = y'\partial y' + x'\partial x',$$

und beide Gleichungen lassen sich, wenn die Differenziale mittelst der Gleichungen $x'\partial x + y'\partial x = 0$ und $x\partial x' + y\partial y'$ fortgeschafft werden, umformen in die Gleichung:

$$(y - y').\, t - (x - x')\, u = yx' - xy'$$

an die Gerade M M'.

§. 26.

Wie in der Planimetrie gibt es auch hier für jeden Punkt M einer sphärischen Curve einen Kreis, welcher mit der Curve eine Berührung des zweiten Grades hat und der **Krümmungskreis** der Curve für ihren Punkt M genannt wird. Sein sphärischer Radius r heißt der **Krümmungshalbmesser** für den Punkt M. Legen wir der Einfachheit wegen ein rechtwinkeliges Coordinaten-System zum Grunde, und es sey $\varphi\,(x, y) = 0$ die Gleichung an die

Curve. Die Gleichung an den Kreis, bezogen auf dieselben beiden Axen, ist dann:

$$\cos r = \frac{1 + ax + by}{\sqrt{(1+a^2+b^2)} . \sqrt{(1+x^2+y^2)}},$$

wenn sein Mittelpunkt N bezeichnet wird mit (a, b). Diese Gleichung ist in anderer Form:

$$\sin r = \sqrt{\frac{(x-a)^2 + (ay-bx)^2 + (y-b)^2}{(1+a^2+b^2) . (1+x^2+y^2)}},$$

oder auch $\operatorname{tng} r = \frac{\sqrt{[(x-a)^2 + (ay-bx)^2 + (y-b)^2]}}{1 + ax + by}$.

Werden die Gleichung an die Curve $\varphi(x, y) = o$ und auch die Gleichung an den Kreis zweimal differenziirt und die Differenzialverhältnisse $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, wie auch die Werthe von x und y selbst nach §. 21 identificirt, so erhält man zum Ausdrucke der Berührung des zweiten Grades drei Gleichungen, welche zur Bestimmung der drei Constanten a, b, r des Kreises dienen und auch hinreichen.

Die erste Differenzialgleichung ist nun nach einiger Umformung:

$$a[1+y^2-pxy]+b[p+px^2-xy] = x+py,$$

oder nach §. 22 die Gleichung an die durch den Berührungspunkt M der Curve gehende Normale, in welcher sich also die Mittelpunkte N aller Kreise befinden, wovon die Curve in M berührt werden kann, und unter welcher sich auch der gesuchte Krümmungskreis befindet.

Differenziirt man jene Gleichung noch einmal, so erhält man die Gleichung:

$$a[py-p^2x-qxy]+b[q+px+qx^2-y] = 1+p^2+qy.$$

Die erste Gleichung läßt sich auch umformen in:

$$(b-y) . [p+px^2-xy]+(a-x) . [1+y^2-pxy] = o,$$

und die zweite in:

$$(b-y) . [q+px+qx^2-y]+(a-x) . [py-p^2x-qxy] = 1+p^2 +p^2x^2-2pxy+y^2.$$

Das Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung steht mit dem Differenziale des Bogens der Curve im Zusammenhange; denn es ist nach §. 23:

$$\partial s = \frac{\partial x . \sqrt{(1+p^2+(y-px)^2)}}{1+x^2+y^2},$$

und setzen wir: $v = \sqrt{[1+p^2+(y-px)^2]}$; $w = \sqrt{(1+x^2+y^2)}$, so ist jenes Glied: $= v^2$, und das Differenzial des Bogens ist dann: $\partial s = \frac{v . \partial x}{w^2}$. Ziehen wir aus den beiden Gleichungen die Werthe

von (a—x) und (b—y), so sind sie:

$$a-x=\frac{v^2(p+px^2-xy)}{v^2(y-px)-qw^2} \text{ und } b-y=\frac{-v^2(1+y^2-pxy)}{v^2(y-px)-qw^2},$$

und hierdurch ist die Lage des Mittelpunktes des Krümmungskreises bestimmt. Man hat aber auch noch unmittelbar:

$$a=\frac{v^2p-qxw^2}{v^2(y-px)-qw^2} \text{ und } b=\frac{-v^2(1+y^2-pxy)}{v^2(y-px)-qw^2},$$

woraus noch zum künftigen Gebrauche folgt:

$$ay-bx=\frac{v^2(x+py)}{v^2(y-px)-qw^2}.$$

Was die Bestimmung des Krümmungshalbmessers r betrifft, so ist sie am einfachsten mittelst der Formel:

$$\text{tng}\, r=\frac{\sqrt{[(x-a)^2+(ay-bx)^2+(y-b)^2]}}{1+ax+by}.$$

Werden die gefundenen Werthe substituirt, so erhält man zunächst:

$$\text{tng}\, r=\frac{v^2.\sqrt{[(p+px^2-xy)^2+(x+py)^2+(1+y^2-pxy)^2]}}{-q.w^4}.$$

Da aber $p+px^2-xy=pw^2-y(x+py)$ und $1+y^2-pxy=w^2-x(x+py)$ ist, so hat man: $(p+px^2-xy)^2+(x+py)^2+(1+y^2-pxy)=w^2[(1+p^2)w^2-(x+py)^2]=v^2.w^2$, und also:

$$\text{tng}\, r=\frac{\left(\frac{v}{w}\right)^3}{-q}.$$

Nach dieser Formel ist die Berechnung des Krümmungshalbmessers kaum zusammengesetzter, als nach der analogen in der Planimetrie.

§. 27.

Die vorhin gefundenen Werthe von a und b sind Functionen von x und y, und wenn man die Gleichung $\varphi(x, y)=o$ zu Hülfe nimmt, so laßen sich x und y eliminiren, wodurch man zu einer Gleichung $\psi(a, b)=o$ zwischen a und b an eine Curve gelangt, welche die Evolute der gegebenen Curve, der Evolvente, heißt.

Legt man durch den Punkt N der Evolute einen sie berührenden Hauptkreis, so ist die Gleichung an ihn:

$$u-b=\frac{\partial b}{\partial a}.(t-a);$$

und um seine Lage in Beziehung auf die Evolvente zu finden, müssen wir offenbar die vorhin gefundenen Ausdrücke von a und b nach x und y differenziiren, um zu dem Differenzialverhältnisse $\frac{\partial b}{\partial a}$

zu gelangen. Die Ausdrücke für a und b wurden aus den beiden Gleichungen:

$$a\,[1 + y^2 - pxy] + b\,[p + px^2 - xy] = x + py,$$

$$a\,[py - p^2x - qxy] + b\,[q + px + qx^2 - y] = 1 + p^2 + qy,$$

gefunden, welche daher auch zur Findung der Differenzialverhältnisse $\frac{\partial a}{\partial x}$ und $\frac{\partial b}{\partial x}$ dienen können.

Differenziirt man vorläufig die erste Gleichung, indem man auch a und b als veränderlich betrachtet, so erhält man:

$$\frac{\partial a}{\partial x}.[1 + y^2 - pxy] + a[py - p^2x - qxy] + \frac{\partial b}{\partial x}[p + px^2 - xy] + b[q + px + qx^2 - y] = 1 + p^2 + qy,$$

und wird hiervon die zweite Gleichung subtrahirt, so bleibt:

$$\frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{1 + y^2 - pxy}{p + px^2 - xy}.$$

Es ist also die Gleichung an die durch den Punkt N der Evolute gelegte Tangente:

$$u - b = -\frac{1 + y^2 - pxy}{p + px^2 - xy}(t - b);$$

und diese läßt sich umformen in:

$$t\,[1 + y^2 - pxy] + u\,[p + px^2 - xy] = x + py,$$

d. h., in die Gleichung an die durch den Punkt M gehende Normale der Evolvente. Daher ist jede Normale der Evolvente eine Tangente der Evolute.

§. 28.

Fragen wir aber nicht bloß nach dem Differenzialverhältnisse $\frac{\partial b}{\partial a}$, sondern sollen die Differenziale ∂a und ∂b selbst in ihrer Abhängigkeit von x und y dargestellt werden, so müssen wir auch noch die zweite Gleichung:

$$a\,[py - p^2x - qxy] + b\,[q + px + qx^2 - y] = 1 + p^2 + qy,$$

also differenziiren, daß wir auch a und b als veränderlich ansehen, wobei wir das dritte Differenzialverhältniß, wie folgt, bezeichnen:

$$k = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Gleichwohl differenziiren wir auch diese Gleichung vorläufig so, daß wir a und b als constant ansehen, wodurch wir zu einer Bedingungsgleichung gelangen, welche dann erfüllt seyn wird, wenn der Krümmungskreis mit der Curve eine Berührung des dritten Grades hat.

Wir erhalten die Gleichung:

$$-a[3pqx+kxy]+b[k+3qx+kx^2]=3pq+ky,$$

worin noch die Werthe:

$$a=\frac{v^2p-qxw^2}{v^2(y-px)-pw^2} \text{ und } b=\frac{-v^2-qyw^2}{v^2(y-px)-qw^2},$$

substituirt werden müssen. Wir werden aber, das spätere Bedürfniß berücksichtigend, setzen:

$$\lambda=a.[3pqx+kxy]-b[k+3qx+kx^2]+3pq+ky$$

und auch $\mu=\lambda.[v^2(y-px)-qw^2]$. Nach geschehener Substitution erhalten wir:

$$\mu=kv^2w^2-3pq^2w^4+3qv^2(x+py)+3q^2w^2y(x+py);$$

und die vorhin erwähnte Bedingungsgleichung ist dann $\mu=0$, wofür wir weiterhin einen einfacheren Ausdruck nachweisen werden. Differenziiren wir jetzt die oben stehende Gleichung auch in Hinsicht auf die Veränderlichkeit von a und b, so erhalten wir offenbar:

$$[py-p^2x-qxy].\frac{\partial a}{\partial x}+a[-3pqx-kxy]+[q+px+qx^2-y].\frac{\partial b}{\partial x}$$
$$+[k+3qx+kx^2]b=3pq+ky,$$

oder einfacher:

$$[py-p^2x-qxy].\frac{\partial a}{\partial x}+[q+px+qx^2-y].\frac{\partial b}{\partial x}=\lambda;$$

und wird hiermit die im §. 27 erhaltene Gleichung:

$$[1+y^2-pxy].\frac{\partial a}{\partial x}+[p+px^2-xy].\frac{\partial b}{\partial x}=0,$$

verbunden, so findet man die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\partial b=\frac{-\mu\partial x\,(1+y^2-pxy)}{[v^2(y-px)-qw^2]^2} \text{ und } \partial a=\frac{\mu\partial x\,(p+px^2-xy)}{[v^2(y-px)-qw^2]^2};$$

woraus wir noch sogleich den folgenden herleiten:

$$a\partial b-b\partial a=\frac{-\mu\partial x\,(x+py)}{[v^2(y-px)-qw^2]^2}.$$

§. 29.

Bilden wir nun, um das Differenzial des Bogens der Evolute zu finden, welches wir mit $\partial\sigma$ bezeichnen wollen, dem Ausdrucke $v\partial x=\sqrt{[\partial x^2+(x\partial y-y\partial x)^2+\partial y^2]}$, ähnlich, den Ausdruck $v'.\partial a=[\sqrt{\partial a^2+\partial b^2+(a\partial b-b\partial a)^2}]$,

so erhalten wir offenbar zunächst:

$$v'.\partial a=\pm\frac{\mu\partial x\sqrt{[(1+y^2-pxy)^2+(x+py)^2+(p+px^2-xy)^2]}}{[v^2(y-px)-qw^2]^2}.$$

Der hier im Zähler vorkommende Wurzelausdruck kam auch im §. 26 vor und ist $=\sqrt{(v^2.w^2)}$; daher hat man:

$$v' . \partial a = \frac{\pm \mu \partial x . vw}{[v^2(y-px)-qw^2]^2}.$$

Wir bilden auch, ähnlich dem Ausdrucke $w=\sqrt{(1+x^2+y^2)}$, den Ausdruck $w'=\sqrt{(1+a^2+b^2)}$ und erhalten:

$$w'^2 = \frac{[v^2(y-px)-qw^2]^2+[v^2p-qxw^2]^2+[v^2+qyw^2]^2}{[v^2(y-px)-qw^2]^2}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich auf:

$$w'^2 = \frac{v^6+q^2.w^6}{[v^2(y-px)-qw^2]^2}.$$

Das Differenzial des Bogens der Evolute aber ist: $\partial\sigma = \frac{v'\partial a}{w'^2}$, und also:

$$\partial\sigma = \pm \frac{\mu . v . w . \partial x}{v^6+q^2 . w^6}.$$

Dieses Differenzial formen wir noch weiter um, indem wir den Krümmungshalbmesser für den Punkt M der Evolvente einführen, wodurch wir fürerst erhalten:

$$\partial\sigma = \pm \frac{\mu . v . \partial x}{q^2 . w^5} \cos r^2.$$

Da aber $\frac{-\partial \operatorname{tng} r}{\operatorname{tng} r} = \frac{3\partial v}{v} - \frac{3\partial w}{w} - \frac{\partial q}{q}$ ist, so ist nach einiger Reduction: $\partial \operatorname{tng} r = -\partial x . \operatorname{tng} r \left[\frac{3 pqw - 3 qy(x+py)}{v^2} - \frac{3(x+py)}{w^2} - \frac{k}{q}\right]$ oder $\partial \operatorname{tng} r = \frac{\partial r}{\cos r^2} = \frac{\mu \operatorname{tng} r . \partial x}{v^2 . w^2 . q} = \frac{\mu v . \partial x}{q^2 . w^5}$, und wird hiervon Gebrauch gemacht, so hat man für das Differenzial des Bogens der Evolute den folgenden einfachen Ausdruck:

$$\partial\sigma = \partial r,$$

und also: $\sigma = r + \text{const.}$ Also auch für die Sphärik gilt der in der Planimetrie bekannte Satz, daß die Krümmungshalbmesser einer Curve von den zugehörigen Bogenlängen ihrer Evolute nur um eine Constante verschieden sind, wodurch die Benennungen „Evolute und Evolvente" auch für die Sphärik gerechtfertigt sind.

Schließlich ist nun offenbar, daß die im §. 28 aufgestellte Bedingungsgleichung $\mu = o$, wodurch eine Berührung des Krümmungskreises vom höher als zweiten Grade angezeigt wird, auch durch die Bedingungsgleichung $\partial r = o$ oder $\partial \operatorname{tng} r = o$ ersetzt werden kann.

§. 30.

Um aus der Formel $\operatorname{tng} r = \frac{\left(\frac{v}{w}\right)^3}{-q}$, welche sich vorläufig bloß

auf ein rechtwinkeliges Coordinaten-System bezieht, eine allgemeinere Formel herzuleiten, führen wir zuerst das Differenzial des Bogens ein: $\partial s = \frac{v \partial x}{w^2}$, also: $\frac{v}{w} = \frac{w \partial s}{\partial x}$, und daher:

$$\operatorname{tng} r = \frac{(w \partial s)^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}.$$

Wird nun jetzt die erste Axe um einen Winkel α und die zweite um einen Winkel β so gedreht, daß der neue Axenwinkel die Größe Θ erhält, so ist:

$$\alpha - \beta = 90° - \Theta,$$

und es geht dadurch über x in $x \cos \alpha - y \sin \beta$, y in $x \sin \alpha + y \cos \beta$; wird hiervon Gebrauch gemacht, so verwandelt sich:

$$\partial y . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y \text{ in } (\partial y . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y) . \sin \Theta,$$

und es ist also nun die neue Formel:

$$\operatorname{tng} r = \frac{(w \partial s)^3}{(\partial y \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y) . \sin \Theta}.$$

Sie gilt jetzt für jeden Axenwinkel, und wenn man wieder zur Abkürzung setzt: $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$; ferner: $v = \sqrt{(1 + 2 p \cos \Theta + p^2 + (y - px)^2 . \sin \Theta^2)}$ und $w = \sqrt{(1 + x^2 + y^2 + 2 xy \cos \Theta)}$, so hat man den einfacheren Ausdruck:

$$\operatorname{tng} r = \frac{\left(\frac{v}{w}\right)^3}{-q . \sin \Theta}.$$

Wird der Abstand des Punktes M der Curve vom Anfangspunkte V durch ϱ bezeichnet, so hat man offenbar: $w = \frac{1}{\cos \varrho}$.

§. 31.

Die Natur einer sphärischen Curve läßt sich oft sehr bequem durch Central-Coordinaten ausdrücken. Nehmen wir den früheren Anfangspunkt V zum Centrum, bezeichnen wir die Function $\operatorname{tng} r$ mit z und den Winkel MVX, welchen der Leitstrahl ϱ des Punktes M mit der vorigen ersten Axe VX einschließt, mit v, so sind z und v veränderliche Größen, deren Zusammenhang die Gleichung $\varphi(z, v) = o$ an die Curve angibt.

Sind nun arc $(\operatorname{tng} = x)$ und arc $(\operatorname{tng} = y)$ die rechtwinkeligen Axen-Coordinaten des Punktes M, so ist:

$$x = z \cos v \text{ und } y = z \sin v,$$

also: $\partial x = -z \sin v . \partial v + \cos v . \partial z$ und $\partial y = z \cos v \partial v + \sin v . \partial z$; daher weiter:

$\partial^2 x = - z \cos v \, \partial v^2 - 2 \sin v . \partial v . \partial z + \cos v . \partial^2 z$ und $\partial^2 y = - z \sin v . \partial v^2 + 2 \cos v . \partial v . \partial z + \sin v . \partial^2 z$.

Die Substitution dieser Ausdrücke gibt:

$$w = \sqrt{(1 + z^2)} = \frac{1}{\cos \varrho},$$

$y\partial x - x\partial y = - z^2 . \partial v$ und $\partial x . \partial^2 y - \partial y . \partial^2 x = z^3 . \partial v^3 - z\partial^2 z . \partial v + 2 \partial z^2 . \partial v$.

Daher ist das Differenzial des Bogens:

$$\partial s = \frac{\sqrt{[\partial z^2 + (z^2 + z^4) . \partial v^2]}}{1 + z^2}.$$

Für die wirkliche Anwendung hat es jetzt die in vielen Fällen bequemste Form. Man kann ihm aber auch die folgende geben:

$$\partial s = \sqrt{(\partial \varrho^2 + \sin \varrho^2 . \partial v^2)}.$$

Die Formel für den Krümmungshalbmesser r ist:

$$\operatorname{tng} r = \frac{-\sqrt{\left[\frac{\partial z^2 + z^2 \partial v^2 + z^4 \partial v^2}{1 + z^2}\right]^3}}{z^2 . \partial v^3 - z . \partial^2 z . \partial v + 2 \partial z^2 . \partial v}.$$

Die Lage einer Berührungslinie ist bestimmt durch den Winkel, welchen sie mit dem Leitstrahle einschließt, und welcher durch φ bezeichnet seyn mag. Schließt die zur Abscisse x gehörige Applicate (senkrechte) y' mit der Tangente den Winkel α und mit dem Leitstrahle ϱ den Winkel β ein, so ist offenbar:

$$\varphi = \alpha - \beta; \ \operatorname{tng} \alpha = \cos y' . \frac{\partial x}{\partial y'} \text{ und } \operatorname{tng} \beta = \frac{\operatorname{tng} x}{\sin y'}.$$

Weil nun aber $\operatorname{tng} x = \operatorname{tng} \varrho . \cos v$ und $\sin y' = \sin \varrho . \sin v$ ist, so hat man nach einiger Reduction:

$$\operatorname{tng} \alpha = \frac{\cos v . \partial \varrho - \sin \varrho . \cos \varrho . \sin v . \partial v}{\sin v . \cos \varrho . \partial \varrho + \sin \varrho \cos v . \partial v},$$

$$\operatorname{tng} \beta = \frac{\cos v}{\cos \varrho . \sin v};$$

und da $\operatorname{tng} \varphi = \frac{\operatorname{tng} \alpha - \operatorname{tng} \beta}{1 + \operatorname{tng} \alpha . \operatorname{tng} \beta}$ ist, so findet man durch die Substitution der vorigen Ausdrücke die folgende einfache Formel:

$$\operatorname{tng} \varphi = \sin \varrho . \frac{\partial v}{\partial \varrho}.$$

§. 32.

Der Krümmungshalbmesser einer Curve steht in einem überaus einfachen Zusammenhange mit den Winkeln, unter welchen sich die auf einander folgenden Tangenten und Normalen der Curve schneiden. Zu diesem Ende entwickeln wir zuvor eine allgemeine Formel

zur Bestimmung des Winkels, unter welchem sich die nach einem Gesetze auf einander folgenden Hauptkreise schneiden.

Sind in der Gleichung $P.t+Q.u=1$ die Größen P und Q Functionen von irgend einer und derselben dritten Größe und daher Functionen von einander, welche wir durch $\psi(P,Q)=o$ andeuten wollen, und ändert sich P um ΔP und Q um ΔQ, so erhalten wir die Gleichung:

$$(P+\Delta P.).t+(Q+\Delta Q).u=1,$$

an einen zweiten Hauptkreis, welcher seine Richtung um einen Winkel $=\Delta\varphi$, verglichen mit dem vorigen, geändert hat.

Der Winkel $\Delta\varphi$ kann nun nach den im §. 11 entwickelten allgemeinen Formeln gefunden werden, und es ist, weil der Axenwinkel ein rechter seyn mag:

$$\text{tng}\,(\Delta\varphi)=\frac{\sqrt{[\Delta P^2+(Q\Delta P-P\Delta Q)^2+\Delta Q^2]}}{1+P^2+Q^2+P.\Delta P+Q.\Delta Q}.$$

Geht man nun zu den Gränzen über, so verwandelt sich, wenn P und Q etwa Functionen von x sind, das Verhältniß $\frac{\Delta P}{\Delta X}$ in $\frac{\partial P}{\partial x}$; eben so $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ in $\frac{\partial Q}{\partial x}$ und $\frac{\text{tng}\,(\Delta\varphi)}{\Delta x}$ in $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; daher hat man denn:

$$\partial\varphi=\frac{\sqrt{(\partial P^2+(Q\partial P-P\partial Q)^2+\partial Q^2)}}{1+P^2+Q^2};$$

und von dieser Formel werden wir sogleich Anwendung machen.

§. 33.

Nehmen wir zuerst die Gleichung an die Tangente der Curve, die wir, $\frac{\partial y}{\partial x}$ für p schreibend, zunächst also darstellen:

Es ist hier also: $P=\frac{p}{px-y}$ und $Q=\frac{-1}{px-y}$.

Differenziiren wir diese beiden Gleichungen, indem wir $q=\frac{\partial p}{\partial x}$ setzen, so bekommen wir:

$$\partial P=\frac{-qy\partial x}{(px-y)^2} \text{ und } \partial Q=\frac{qx\partial x}{(px-y)^2};$$

und hieraus folgt: $P\partial Q-Q\partial P=\frac{-q\partial x}{(px-y)^2}$.

Bezeichnen wir nun das Winkeldifferenzial für die Tangenten der Curve mit ∂x, so haben wir offenbar, wenn wir die im §. 26 festgestellte Bezeichnung wählen:

$$\partial\alpha=\frac{-wq\partial x}{v^2}.$$

Es war aber die Formel für den Krümmungshalbmesser r:

$$\operatorname{tng} r = \frac{v^3}{-w^3 q};$$

daher ist: $\operatorname{tng} r . \partial\alpha = \frac{v\partial x}{w^2}$; und da das Differenzial des Bogens $\partial s = \frac{v\partial x}{w^2}$, so ist offenbar:

$$\partial s = \operatorname{tng} r . \partial\alpha.$$

Der Winkel $\partial\alpha$ heißt in der Planimetrie der Winkel der Contingenz. Zu einer eben so einfachen Formel führt auch das Winkeldifferenzial der Normalen einer Curve.

Die Gleichung an die Normale ist:

$$\frac{1+y^2-pxy}{x+py} . t + \frac{p+px^2-xy}{x+py} . u = 1.$$

Daher haben wir jetzt:

$$P = \frac{1+y^2-pxy}{x+py} \text{ und } Q = \frac{p+px^2-xy}{x+py^2}.$$

Durch Differenziiren finden wir hieraus:

$$\partial P = \frac{\partial x(-v^2-qyw^2)}{(x+py)^2} \text{ und } \partial Q = \frac{\partial x\ (w^2xq-v^2p)}{(x+py)^2},$$

$$\text{also: } P\partial Q - Q\partial P = \frac{\partial x\,[w^2q - v^2(y-px)]}{(x+py)^2}.$$

Daher ist: $\sqrt{[\partial P^2 + (P\partial Q - Q\partial P)^2 + \partial Q^2]} = \frac{\partial x . \sqrt{(v^6 + q^2 . w^6)}}{(x+py)^2}.$

Ferner findet man: $1+P^2+Q^2 = \frac{v^2 . w^2}{(x+py)^2}$. Bezeichnen wir also das gesuchte Winkeldifferenzial mit $\partial\beta$, so haben wir:

$$\partial\beta = \frac{\partial x . \sqrt{(v^6+q^2 . w^6)}}{v^2 . w^2}.$$

Da aber das Differenzial des Bogens ist: $\partial s = \frac{v\partial x}{w^2}$, so geht die Formel über in:

$$\partial\beta = \partial s . \frac{\sqrt{(v^6+q^2 . w^6)}}{v^3},$$

und wird der Krümmungshalbmesser r eingeführt, so hat man:

$$\partial s = \sin r . \partial\beta.$$

In der Planimetrie fällt bekanntlich diese Formel mit der vorigen zusammen; hier hingegen ist, wenn wir ∂s eliminiren:

$$\partial\alpha = \cos r . \partial\beta,$$

und also $\partial\beta$ immer größer, als $\partial\alpha$. Wenn wir r eliminiren, so erhalten wir auch noch:

$$\partial\beta^2 = \partial s^2 + \partial\alpha^2.$$

§. 34.

Es bleibt noch die Ermittelung eines Ausdrucks für den Krümmungshalbmesser r einer Curve in dem Falle übrig, daß eine Gleichung $\varphi(x, z) = o$ zwischen der Abscisse x und senkrechten Applicate z des Punktes M der Curve gegeben ist. Man könnte die gesuchte Formel ebenfalls aus der im §. 26 für tng r gegebenen durch die im §. 24 angezeigten Substitutionen herleiten; man kann sie aber auch auf folgende Art herleiten. Ist a die Abscisse und b die zugehörige Applicate des Mittelpunktes N des gesuchten Krümmungskreises, so ist die Gleichung an denselben:

$$\cos r = \sin b \,.\, \sin z + \cos b \,.\, \cos z \,.\, \cos (x - a),$$

welche ebenfalls zweimal differenziirt werden muß, wobei wir aber setzen:

$$p = \frac{\partial x}{\partial z} \text{ und } q = \frac{\partial (p \,.\, \cos z)}{\partial z}.$$

Durch einmaliges Differenziiren erhalten wir nun die folgende Gleichung an die Normale der Curve:

$$\text{tng } b = \text{tng } z \,.\, \cos (x - a) + p \,.\, \sin (x - a).$$

Durch wiederholtes Differenziiren findet sich:

$$\text{tng } (x - a) = \frac{1 + p^2 \cos z^2}{\cos z \left(p \sin z - \frac{\partial p}{\partial z} \cos z\right)}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$v = 1 + p^2 \,.\, \cos z^2,$$

und bemerken wir, daß $-q = p \sin z - \frac{\partial p}{\partial z} \cos z$ ist, so haben wir zur Bestimmung der Constante a die Formel:

$$\text{tng } (x - a) = \frac{v}{-q \cos z}.$$

Also ist:

$$\sin (x - a) = \frac{v}{\sqrt{(v^2 + q^2 \cos z^2)}} \text{ und } \cos (x - a) = \frac{-q \cos z}{\sqrt{(v^2 + q^2 \cos z^2)}}.$$

Werden diese Ausdrücke substituirt, so findet sich:

$$\text{tng } b = \frac{pv - q \sin z}{\sqrt{(v^2 + q^2 \cos z^2)}}.$$

Daher ist nun auch:

$$\sin b = \frac{pv - q \sin z}{\sqrt{(v^2 + p^2 v^2 - 2 pqv \sin z + q^2)}} \text{ und}$$

$$\cos b = \frac{\sqrt{(v^2 + q^2 \cos z^2)}}{\sqrt{(v^2 + p^2 v^2 - 2 pqv \sin z + q^2)}} \,.$$

Werden auch diese Werthe in der Formel: $\cos r = \sin b \sin z + \cos b \cos z \cos (x - a)$, substituirt, so findet sich:

$$\cos r = \frac{pv \sin z - q}{\sqrt{(v^2 + p^2 v^2 - 2 pqv \sin z + q^2)}},$$

oder einfacher: $\operatorname{tng} r = \frac{\sqrt{v^3}}{pv \sin z - q}$. Nach dieser Formel ist die Berechnung des Krümmungshalbmessers in vielen Fällen sehr bequem.

Man wird nicht übersehen, daß, wenn der von der Tangente und Applicate eingeschlossene Winkel mit λ bezeichnet wird, man habe:

$$\operatorname{tng} \lambda = p \,.\, \cos z; \; \partial z = \partial s \,.\, \cos \lambda \text{ und } \partial x \,.\, \cos z = \partial s \,.\, \sin \lambda.$$

Da endlich das Differenzial des Bogens ist $\partial s = \sqrt{(\partial z^2 + \cos z^2 . \partial x^2)}$, so hat man auch: $\partial s = \partial z \sqrt{(1 + \cos z^2 . p^2)} = \partial x . \sqrt{v}$, oder rückwärts: $v = \frac{\partial s^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\cos \lambda^2}$.

§. 35.

Es ist im §. 25 bewiesen worden, daß mit jeder Curve, deren Gleichung unter $\varphi (x, y) = o$ verstanden wurde, eine zweite, deren Gleichung mit $\psi (x', y') = o$ bezeichnet wurde, in einer solchen Wechselbeziehung steht, daß die sphärischen Mittelpunkte der Berührungslinien der einen sich jedesmal in der andern Curve befinden. Jede Normale der einen Curve ist ferner auch eine Normale der anderen. Eine unmittelbare Folge hiervon aber ist, daß die beiden Curven dieselbe Evolute haben. Um jedoch dieses Gesetz auf dem Wege der Rechnung zu beweisen, wenden wir auf die Curve $\psi (x', y') = o$ die im §. 26 festgestellte Bezeichnung an, nur daß wir der Unterscheidung wegen jedesmal ein Comma beifügen. Ist M oder (x, y) ein Punkt der ersten Curve, und wird die zweite Curve von der Normale des Punktes M in M′ oder (x', y') geschnitten, so ist nach §. 25:

$$x' = \frac{p}{y - px} \text{ und } y' = \frac{-1}{y - px},$$

also: $p' = \frac{-x}{y}$,

ferner: $q' = \frac{-(y - px)^3}{qy^3}$,

und: $y' - p'x' = \frac{-1}{y}$.

Auch ist: $w'^2 = \frac{v^2}{(y-px)^2}$

und $v'^2 = \frac{w^2}{y^2}$.

Legen wir nun an den Punkt M der ersten Curve einen Krümmungskreis, dessen Radius r und Mittelpunkt N oder (a, b) seyn mag, und legen wir eben so an den Punkt M' der zweiten Curve einen Krümmungskreis, dessen Radius r' und Mittelpunkt N' oder (a', b') seyn mag, so ist nach §. 26:

$$a' = \frac{v'^2 . p' - q'x'w'^2}{v'^2 (y' - p'x') - q'w'^2};$$

und werden hierin die vorhin angegebenen Werthe substituirt, so hat man: $a' = \frac{v.^2 p - qxw^2}{v^2(y-px) - qw^2}$, oder: $a' = a$. Ganz eben so findet man: $b' = b$; d. h., der Mittelpunkt N' ist mit N derselbe. Daher haben denn die beiden Curven dieselbe Evolute, was sich auch vorhersehen ließ.

Da ferner $\operatorname{tng} r' = \frac{\left(\frac{v'}{w'}\right)^3}{-q'}$ ist, so findet man durch die Substitution der Werthe von v', w' und q' den Ausdruck:

$\operatorname{tng} r = \pm \frac{q}{\left(\frac{v}{w}\right)^3}$, oder auch: $\operatorname{tng} r . \operatorname{tng} r' = \pm 1$, und also:

$r + r' = 90°$, oder: $r' - r = 90°$.

§. 36.

Es bleibt noch übrig, vom Differenziale der Fläche zu handeln, wobei wir in Fig. 1 das Viereck VPMQ, dessen Größe $= f$ seyn mag, betrachten. Den Punkt M bezeichnen wir mit (x, y); den Punkt N mit $(x + \Delta x, y)$; den Punkt N' mit $(x, y + \Delta y)$ und den Punkt M' also mit $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Das Viereck MNM'N' ist offenbar $= \Delta f$, und ist also das Differenzial ∂f von der Form

$$\partial f = V . dx . \partial y,$$

oder ein Doppeldifferenzial. Nehmen wir nun vorläufig an, daß der Axenwinkel $= 90°$ ist, so ist im Viereck VPMQ offenbar auch: $P = Q = 90°$, und also $f = PMQ - \frac{\pi}{2}$, wenn der Radius der Kugel $= 1$ gesetzt wird, und also auch:

$$\sin f = \sin VP . \sin VQ,$$

oder $\sin f = \frac{x \cdot y}{\sqrt{(1+x^2)} \cdot \sqrt{(1+y^2)}}$.

Hieraus ziehen wir, wenn bloß x als veränderlich angesehen wird:

$$\partial f = \frac{y \partial x}{(1+x^2) \cdot \sqrt{(1+x^2+y^2)}}.$$

Differenziiren wir noch einmal, indem auch y als veränderlich angesehen wird, so haben wir das gesuchte Doppeldifferenzial:

$$\partial f = \frac{\partial x . \partial y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}.$$

Bezeichnet ϱ den Abstand des Punktes M vom Anfangspunkte, so ist also:

$$f = \int\int \cos \varrho^3 . \partial x . \partial y,$$

wofür auch die einfachen Integrale $\int \frac{y \partial x}{(1+x^2) \sqrt{(1+x^2+y^2)}}$ und $\int \frac{x \partial y}{(1+y^2) . \sqrt{(1+x^2+y^2)}}$ an die Stelle gesetzt werden können.

§. 37.

Nicht viel zusammengesetzter ist die für jeden Axenwinkel v geltende Formel für das Differenzial der Fläche.

Bezeichnen wir nämlich den Winkel PMQ mit ψ (x, y), so ist der Winkel XPM=ψ (x, y) für y=o oder ψ (x, o) und der Winkel YQM=ψ (x, y) für x=o oder ψ (o, y). Wird nun der Inhalt des Vierecks VPMQ mit f bezeichnet, so ist offenbar:

$$f = \psi(x, y) + [\pi - \psi(o, y)] + [\pi - \psi(x, o)] + v - 2\pi,$$

oder auch: $f = \psi(x, y) - \psi(o, y) - \psi(x, o) + v$.

Differenziiren wir diesen Ausdruck in Hinsicht auf die Veränderlichkeit von x und y, so haben wir:

$$\partial f = \left(\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x . \partial y}\right) \partial x . \partial y.$$

Nun ist aber nach §. 5:

$$\sin \psi(x, y) = \frac{\sin v . \sqrt{(1+x^2+y^2+2 xy \cos v)}}{\sqrt{(1+x^2 \sin v^2)} . \sqrt{(1+y^2 \sin v^2)}}$$

und $\cos \psi(x, y) = \frac{\cos v - x . y . \sin v^2}{\sqrt{(1+x^2 \sin v^2)} . \sqrt{(1+y^2 \sin v^2)}}$.

Differenziirt man in Ansehung der Veränderlichkeit von x, so erhält man:

$$\partial \psi(x, y) = \frac{\sin v \, (y + x \cos v) . \partial x}{(1+x^2 \sin v^2) \sqrt{(1+x^2+y^2+2xy \cos v)}}.$$

Differenziirt man diesen Ausdruck wieder in Ansehung der Veränderlichkeit von y, so hat man endlich das gesuchte Doppeldifferenzial:

$$\partial f = \frac{\sin v \,.\, \partial x \,.\, \partial y}{\sqrt{(1+x^2+y^2+2xy\cos v)^3}},$$

oder rückwärts: $f = \sin v \,.\, \iint \cos \varrho^3 \,.\, \partial x \,.\, \partial y$.
Integrirt man wirklich nach ∂y, so erhält man:

$$\partial f = \frac{\sin v\,(y+x\cos v).\partial x}{(1+x^2\sin v^2)\sqrt{(1+x^2+y^2+2xy\cos v)}} + \partial x \,.\, \text{const.}$$

Soll das Integral für $y=o$ verschwinden, so ist:

$$\text{const.} = -\frac{x\sin v\cos v}{(1+x^2\sin v^2).\sqrt{(1+x^2)}},$$

und also wie oben:

$$\partial f = \left(\frac{\partial\psi\,(x,y)}{\partial x}\right)\partial x - \left(\frac{\partial\psi\,(x,o)}{\partial x}\right)\partial x.$$

§. 38.

Man kann auch die Formel $f=\sin v.\iint\cos\varrho^3.\partial x.\partial y$ aus der ähnlichen Formel $f=\iint\cos\varrho^3.\partial x.\partial y$ im §. 37 herleiten.

Es geht nämlich, wie allgemein bekannt, ein Doppelintegral $\iint V.\partial x.\partial y$, wenn $P\partial x+Q\partial y$ für ∂x und $P'\partial x+Q'\partial y$ für ∂y gesetzt wird, über in

$$\iint V(PQ'-P'Q).\partial x.\partial y.$$

Eine solche Substitution müssen wir aber vornehmen, wenn wir die Richtungen der beiden Axen um die Winkel α und β so verändern, daß $v=90^\circ-(\alpha-\beta)$ ist. Dabei geht über

$$\partial x \text{ in } \partial x.\cos\alpha-\partial y.\sin\beta,$$
$$\partial y \text{ in } \partial x.\sin\alpha+\partial y.\cos\beta,$$

und es ist also: $P=\cos\alpha$, $Q=-\sin\beta$, $P'=\sin\alpha$, $Q=\cos\beta$; daher denn: $PQ'-P'Q=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=\sin v$, und es geht also

$$\cos\varrho^3.\partial x.\partial y \text{ über in } \sin v.\cos\varrho^3.\partial x.\partial y,$$

wie behauptet wurde.

Wir formen aber das Integral $f=\iint\cos\varrho^3.\partial x.\partial y$ noch anders um, indem wir die im §. 31 angewandten Central-Coordinaten einführen, wobei wir wieder $\text{tng}\,\varrho=z$ setzen. Es ist nun:

$$\partial x=-z\sin v.\partial v+\cos v.\partial z,$$
$$\partial y=\ z\cos v.\partial v+\sin v.\partial z;$$

und also: $P=-z\sin v$, $Q=\cos v$, $P'=z\cos v$, $Q'=\sin v$; daher ist: $PQ'-QP'=-z$, und demnach das gesuchte Doppelintegral:

$$f=\iint\frac{z\partial z.\sin v}{\sqrt{(1+z^2)^3}}.$$

Integriren wir nach z, so bekommen wir:

$$\partial f=-\cos\varrho.\partial v+\partial v.\text{const.}$$

Soll das Integral für $\varrho=o$ verschwinden, so ist: const$=+1$, und also:

$$\partial f=(1-\cos\varrho).\partial v=2.(\sin \tfrac{1}{2}\varrho)^2.\partial v.$$

Es fehlt noch die Formel für den Gebrauch der Abscissen und zugehörigen senkrechten Applicaten. Es sey α die Abscisse und β die zugehörige senkrechte Applicate des Punktes M, so ist:

$$x = \text{tng}\ \alpha \text{ und } y = \frac{\text{tng}\ \beta}{\cos\ \alpha},\ \text{also: } \frac{\partial x}{1+x^2} = \partial\alpha \text{ und}$$

$$\frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}} = \frac{\text{tng}\ \beta}{\sqrt{(1+\text{tng}\,\beta^2)}} = \sin\ \beta;$$ daher verwandelt sich die Formel $\partial f = \frac{y\partial x}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2+y^2)}}$ in $\partial f = \sin\beta.\partial\alpha$, u. es ist also:

$$f = \int \sin\ \beta.\partial\alpha\,.$$

Von der sphärischen Cykloide und Kettenlinie.

§. 39.

Nach den sphärischen Kegelschnitten sind unstreitig die sphärische Cykloide und auch die sphärische Kettenlinie die bemerkenswerthesten Curven. Wenn ein kleiner Kreis, dessen Centrum C und dessen Radius CM=CN=r (Fig. 7) ist, auf einem Hauptkreise der Kugel AB fortrollt, so beschreibt ein Punkt M jenes Kreises die sphärische Cykloide AFB auf der Kugel, und es ist, wenn M von A aufstieg und auf B herabkommt, offenbar das Stück AB des Hauptkreises gleich dem Umfange des kleinen Kreises, d. h.:

$$AB = 2\pi\ \sin\ r.$$

Berührt der erzeugende Kreis den Hauptkreis AB in einem anderen Punkte N, so ist das Stück AN des Hauptkreises eben so gleich dem Bogen MN des kleinen Kreises.

Ist nun der Winkel $MCN=\varphi$, so ist der Bogen $MN=\varphi\ \sin\ r$, und also:

$$AN=\varphi\ \sin\ r;\ \text{daher: } BN=(2\pi-\varphi).\sin\ r\,.$$

Ist Y das sphärische Centrum des Hauptkreises AB und E die Mitte von AB, so ziehe man YMP, YCN, YFE, und es ist dann offenbar die Cykloide AFB in F halbirt; auch sind AP=x und PM=z die Abscisse und senkrechte Applicate des Punktes M.

Wird noch die Sehne MN gezogen, so hat man:

$$PN=\varphi\ \sin\ r-x\,.$$

Es ist nun weiter: cos MN=cos PN.cos PM=cos MC.cos NC +sin MC.sin NC. cos φ, oder:

$$\cos\ (\varphi\ \sin\ r-x) = \frac{\cos\ r^2+\sin\ r^2.\cos\ \varphi}{\cos\ z}\ \ldots\ldots\ (1).$$

Im Dreiecke MCY ist offenbar: sin MC.sin MCY=sin MY. sin MYC, oder:

$$\sin\ (\varphi\ \sin\ r-x) = \frac{\sin\ r.\sin\ \varphi}{\cos\ z}\ \ldots\ldots\ (2).$$

Auch hat man noch im Dreiecke MCY: $\cos MY = \cos MC . \cos CY + \sin MC \sin CY \cos MCY$, oder auch:

$$\sin z = \sin r . \cos r (1 - \cos \varphi) \text{ . . . . } (3).$$

Diese Gleichung kann man aber auch als eine Folge der beiden vorigen darstellen, wenn man jene zum Quadrate erhebt und dann addirt, wodurch offenbar die Größe ($\varphi \sin r - x$) aus ihnen eliminirt wird. Man hat aber auch noch:

$$\operatorname{tng} (\varphi \sin r - x) = \frac{\sin r \sin \varphi}{\cos r^2 + \sin r^2 . \cos \varphi} \text{ . . . . } (4).$$

Nach den beiden letzten Formeln, die auch noch umgeformt werden können, kann man aus dem Winkel φ die Größen x und z berechnen, und wenn man den Winkel φ eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen x und z, die wir durch $\chi(x, z) = 0$ andeuten, aber nicht wirklich aufstellen, weil sie nicht einfach genug ist.

§. 40.

Da $1 - \cos \varphi = \frac{\sin z}{\sin r \cos r}$ und $1 + \cos \varphi = \frac{\sin 2r - \sin z}{\sin r \cos r}$ ist, so hat man noch:

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(\sin z . \sin 2r - \sin z^2)}}{\sin r . \cos r} \text{ und } \operatorname{tng} {}^1\!/_2 \varphi = \sqrt{\frac{\sin z}{\sin 2r - \sin z}}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man für das Differenzial von φ die Formel:

$$\partial \varphi = \frac{\cos z . \partial z}{\sqrt{(\sin z . \sin 2r - \sin z^2)}} \text{ . . . . . } (5).$$

Wir differenziiren auch die Formel $\sin (\varphi \sin r - x) = \frac{\sin r . \sin \varphi}{\cos z}$ und erhalten:

$$\sin r . \partial \varphi - \partial x = \frac{\sin r (\cos z \cos \varphi \, \partial \varphi + \sin \varphi \sin z \, \partial z)}{\cos z (\cos r^2 + \sin r^2 \cos \varphi)},$$

oder, wenn wir auf der rechten Seite φ und $\partial \varphi$ fortschaffen:

$$\sin r . \partial \varphi - \partial x = \frac{(\sin r \cos r \sin z^2 - \sin z + \sin r \cos r) \, \partial z}{(\cos r \cos z - \sin r \sin z \cos z) . \sqrt{(\sin z . \sin 2r - \sin z^2)}}.$$

Wird auch noch $\sin r . \partial \varphi$ auf der linken Seite fortgeschafft, und das Differenzial-Verhältniß $\frac{\partial x}{\partial z}$ mit p bezeichnet, so hat man:

$$p = \frac{\operatorname{tng} z . (\cos r - \sin r . \sin z)}{\sqrt{(\sin z . \sin 2r - \sin z^2)}} \text{ . . . . . } (6),$$

und dieses ist die gesuchte, wie man sieht, ziemlich einfache Differenzialgleichung der sphärischen Cykloide.

Durch gleiche Substitution findet man auch noch:

$$\sin(\varphi \sin r - x) = \frac{\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z^2)}}{\cos r . \cos z} \text{ und}$$

$$\cos(\varphi \sin r - x) = \frac{\cos r - \sin r \sin z}{\cos r \cos z},$$

also: $\operatorname{tng}(\varphi \sin r - x) = \dfrac{\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z^2)}}{\cos r - \sin r \sin z} \ldots (7).$

Aus diesen Formeln finden wir nun schon jetzt ein bemerkenswerthes Resultat.

Bezeichnet man nämlich, wie im §. 24, die Subnormale mit n, so hat man: $\operatorname{tng} n = \dfrac{\operatorname{tng} z}{p}$, und also: $\operatorname{tng} n = \dfrac{\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z^2)}}{\cos r - \sin r . \sin z}$.

Daher hat man denn: $n = \varphi . \sin r - x$, oder: $n = PN$, wie in der Planimetrie.

Um daher an den Punkt M der Cykloide eine Tangente zu legen, ziehe man die Sehne MN und errichte darauf in M ein sphärisches Perpendikel, so ist es die gesuchte Tangente der Curve.

Aber diese Eigenschaft ist außer der Entstehungsart vielleicht die einzige, welche die sphärische Cykloide mit der ebenen gemein hat.

§. 41.

Wenden wir nun die im §. 34 gewählte Bezeichnungsart an, nach welcher: $v = 1 + p^2 \cos z^2$ und das Differenzial des Bogens ist: $\partial s = \partial z . \sqrt{v}$, so erhalten wir:

$$v = \cos z^2 . \frac{\sin 2r - \sin z \sin r^2}{\sin 2r - \sin z},$$

$$\text{also: } \partial s = \cos z . \partial z \sqrt{\frac{\sin 2r - \sin z \sin r^2}{\sin 2r - \sin z}},$$

und man übersieht schon, daß die Integration ausführbar ist, ohne unendliche Reihen anzuwenden.

Wir formen jedoch dieses Differenzial noch um, indem wir vom Mittelpunkte C des erzeugenden Kreises auf die Normale MN ein Perpendikel CS fällen, dessen Länge wir mit k bezeichnen, um das Differenzial des Bogens dadurch auszudrücken.

Es ist nämlich:

$\operatorname{tng} r . \cos \dfrac{\varphi}{2} = \operatorname{tng} k$, und also: $\sin k = \dfrac{\sin r \cos \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{(1 - \sin r^2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2)}}$,

oder: $\sin k^2 = \dfrac{\sin r^2 . (1 + \cos \varphi)}{2 - \sin r^2 (1 - \cos \varphi)}$; und da auch noch

$1 + \cos \varphi = \dfrac{\sin 2r - \sin z}{\sin r \cos r}$ und $1 - \cos \varphi = \dfrac{\sin z}{\sin r \cos r}$ ist, so hat

man offenbar: $\sin k = \sin r . \sqrt{\frac{\sin 2r - \sin z}{\sin 2r - \sin z \sin r^2}}$,

oder rückwärts: $\sin z = \frac{\sin 2r}{\sin r^2}\left(1 - \frac{\cos r^2}{\cos k^2}\right)$;

daher: $\cos z . \partial z = \frac{2 \sin 2r . \cos r^2}{\sin r^2} . \frac{\sin k . \partial k}{\cos k^3}$.

Mithin erhalten wir für das Differenzial des Bogens den folgenden einfachen Ausdruck:

$$\partial s = 4 \cos r^3 . \frac{\partial k}{\cos k^3} .$$

Machen wir nun von der im vierten Bande (Seite 290) des Journales für die reine und angewandte Mathematik beschriebenen Längefunction Gebrauch, so ist:

$$s = 2 \cos r^3 \left(\mathfrak{L}k + \frac{\sin k}{\cos k^2}\right),$$

wenn das Integral für $k=o$ verschwinden, d. h., die Länge des Bogens von der Mitte F der Curve an gerechnet werden soll. Ist also $CS=k$, so ist der Bogen $FM=s$.

§. 42.

Auch die Quadratur der Cykloide gelingt, ohne ungeschlossene Ausdrücke anzuwenden. Ist ∂f das Differenzial der Fläche, so hat man nach §. 38: $\partial f = \sin z . \partial x$, und also:

$$\partial f = \frac{\cos r - \sin r . \sin z}{\sqrt{(\sin z . \sin 2r - \sin z^2)}} . \operatorname{tng} z^2 . \partial \sin z .$$

Setzt man zur Abkürzung $u = \sin z$, so hat man:

$$\partial f = \frac{u^2 \partial u}{1 - u^2} . \frac{\cos r - u \sin r}{\sqrt{(u \sin 2r - u^2)}} .$$

Die Integration dieser Formel gelingt am bequemsten auf folgende Weise. Wir zerlegen das Differenzial in:

$$\partial f = \frac{(\cos r - u \sin r) \partial u}{(1 - u^2) . \sqrt{(u \sin 2r - u^2)}} - \frac{(\cos r - u \sin r) \partial u}{\sqrt{(u \sin 2r - u^2)}} .$$

Setzt man nun:

$$\operatorname{tng} \psi = \frac{\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z)^2}}{\sin r - \sin z . \cos r}$$

$$\text{und } \sin \alpha = \sqrt{\frac{\sin z}{\sin 2r}},$$

so ist: $\partial \psi = \frac{(\cos r - u \sin r) \partial u}{(1 - u^2) . \sqrt{(u \sin 2r - u^2)}}$ und $\partial \alpha = \frac{\partial u}{2\sqrt{(u \sin 2r - u^2)}}$,

also: $\partial \left[2 \cos r^2 . \alpha - \sin r . \sqrt{(u \sin 2r - u^2)}\right] = \frac{(\cos r - u \sin r) \partial u}{\sqrt{(u \sin 2r - u^2)}}$.

Daher hat man denn:

$$f = \psi - 2\cos r^2 . \alpha - \sin r . \sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z^2)} + const.$$

Soll das Integral für $z = o$ verschwinden, so ist: $const = o$; und will man die Hälfte AEFA der ganzen Area haben, so hat man $z = 2r$ zu setzen, wodurch $\psi = \pi$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird. Daher ist:

$$AEFA = \pi - \pi \cos r^2.$$

§. 43.

Um zu der Berechnung des Krümmungshalbmessers für den Punkt M der Curve, welchen wir mit ϱ bezeichnen, überzugehen, setzen wir, wie im §. 34:

$$q = \frac{\partial (p \cos z)}{\partial z},$$

und es ist dann: $\operatorname{tng} \varrho = \frac{\sqrt{v^3}}{pv \sin z - q}$.

Man findet nun aber:

$$q = \frac{\sin r . \sin z \cos z (\cos r^2 - 3 \sin r \cos r \sin z + \sin z^2)}{\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z^2)^3}},$$

und hieraus folgt nach einiger Reduction weiter:

$$pv \sin z - q = \frac{-\sin r \sin z \cos z^3 (\cos r^2 - 3 \sin r \cos r \sin z + \sin r^2 \sin z^2)}{\sqrt{(\sin z \sin 2r - \sin z^2)^3}}.$$

Daher hat man denn:

$$\operatorname{tng} \varrho = \frac{\sqrt{(2 \cos r - \sin r \sin z)^3} . \sqrt{(\sin r . \sin z)}}{\cos r^2 - 3 \sin r \cos r \sin z + \sin r^2 \sin z^2}.$$

Dieser Ausdruck wird einfacher, wenn man die Normale MN einführt, welche mit N bezeichnet werden mag. Es ist nämlich:

$$\cos N = \cos z . \cos n = \frac{\cos r - \sin r \sin z}{\cos r}, \text{ und also:}$$

$$\sin r . \sin z = \cos r (1 + \cos N).$$

Daher hat man denn nach gehöriger Reduction die Formel:

$$\operatorname{tng} \varrho = \frac{\sin N . (1 + \cos N)}{1 - \cos N - \cos N^2},$$

welche in so fern bemerkenswerth ist, als sie den Radius r des erzeugenden Kreises gar nicht enthält.

Man hat aber auch:

$$\sin \varrho = \frac{\sin N}{\sqrt{(1 + \sin N^2)}} . (1 + \cos N).$$

§. 44.

Wir gehen zu der zweiten transscendenten sphärischen Curve,

der Kettenlinie, über. Es sey in Fig. 8 der Anfangspunkt V, und M ein Punkt der Curve, dessen Abscisse VP $=x$ und senkrechte Applicate PM $=z$ seyn mag; Q sey das sphärische Centrum des als Abscissenlinie dienenden Hauptkreises VPV. Wenden wir die im vierten Bande (Seite 288 u. f. f.) des Journales für die reine und angewandte Mathematik beschriebene Bezeichnungsart an, so ist die Gleichung an die Curve:

$$\text{tng } z = \text{tng } a \,.\, \text{Cos } (x \cot a),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\alpha = \text{tng } a$ setzen:

$$\text{tng } z = \alpha \,.\, \text{Cos}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot$$

Die Constante a mag der Parameter der Curve heißen. Für $x=o$ hat man offenbar $z=a$; d. h., die dem Scheitel A der Curve zugehörige Applicate VA ist der Parameter selbst.

Zu gleich großen und entgegengesetzten Werthen von x gehören durchaus gleiche Werthe von z, übrigens ist z immer $<90°$, denn allererst für $x = \frac{1}{o}$ wird $z = 90°$.

Daher läuft die Curve mit zwei congruenten Armen nach entgegengesetzten Seiten von ihrem Scheitel A ins Unendliche fort, und nähert sich dabei fortwährend dem Punkte Q, welcher ihre Asymptote ist.

Die Linie VAQ mag die zweite Axe, und der Hauptkreis VPV die erste Axe der Curve heißen.

Die beiden Arme der Curve schneiden einander offenbar in mehreren Punkten: A, A′, A″, A‴, 2c., welche sämmtlich in der zweiten Axe liegen. Die diesen Punkten zugehörigen Abscissen sind offenbar:

$$\pm o;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \pm 3\pi;\ \ldots\ \pm n\pi\ \ldots,$$

und wenn die diesen Abscissen zugehörigen Applicaten der Reihe nach bezeichnet werden mit $\overset{0}{z}, \overset{1}{z}, \overset{2}{z}, \overset{3}{z}, \ldots \overset{n}{z}$, so hat man allgemein:

$$\text{tng } \overset{n}{z} = \alpha \,.\, \text{Cos}\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \text{ oder}$$

$$\text{tng } \overset{n}{z} = \frac{\alpha}{\cos \text{L}\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \cdot$$

Die Größen $\text{tng } \overset{0}{z}, \text{tng } \overset{1}{z}, \text{tng } \overset{2}{z}, \text{tng } \overset{3}{z}, \ldots \text{tng } \overset{n}{z} \ldots$ bilden eine Reihe, in welcher man aus zwei nächst vorhergehenden Gliedern immer das folgende Glied berechnen kann, und zwar nach der Formel:

$$\text{tng } \overset{n+2}{z} = c \,.\, \text{tng } \overset{n+1}{z} - \text{tng } \overset{n}{z},$$

in welcher der constante Factor $c = 2\ \text{Cos}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{2}{\cos L\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$ ist.

§. 45.

Um eine Tangente an den Punkt M der Curve zu legen, differenziiren wir die Gleichung der Curve, und indem wir $p = \frac{\partial x}{\partial z}$ setzen, bekommen wir:

$$p . \cos z = \frac{\sin a}{\sqrt{(\sin z^2 - \sin a^2)}}.$$

Stellt TM die Tangente für den Punkt M der Curve dar und schließt sie mit der Applicate PM den Winkel ψ und mit der ersten Axe an T den Winkel ψ ein, so hat man auch: $\text{tng}\,\psi = p . \cos z$, und also:

$$\text{tng}\,\psi = \frac{\sin a}{\sqrt{(\sin z^2 - \sin a^2)}},$$

oder einfacher: $\sin z . \sin \psi = \sin a$.

Wird also von P das Loth PS auf die Tangente MT gefällt, so ist auch: $\sin PM . \sin \psi = \sin z . \sin \psi = \sin PS$, und daher: $PS = a$.

Daher hat die Kettenlinie die charakteristische Eigenschaft mit der ebenen Kettenlinie gemein, daß das Loth PS immer von constanter Länge und zwar dem Parameter VA gleich ist.

Nun ist aber immer: $\cos PS^2 = \cos \varphi^2 + \cos \psi^2$, oder auch: $\cos \varphi = \cos z . \sin \psi$; daher hat man auch:

$$\text{tng}\, z . \cos \varphi = \sin a.$$

Da ferner $\text{tng}\, PT = \text{tng}\,\psi . \sin z$ ist, so hat man zur Bestimmung der Subtangente PT:

$$\text{tng}\, PT = \frac{\sin a \sin z}{\sqrt{(\sin z^2 - \sin a^2)}}.$$

Das Differenzial des Bogens der Curve ist $\partial s = \partial z . \sqrt{v}$ und es ist: $v = 1 + p^2 \cos z^2$; also:

$$v = \frac{\sin z^2}{\sin z^2 - \sin a^2}, \text{ und also:}$$

$$\partial s = \frac{\sin z . \partial z}{\sqrt{(\cos a^2 - \cos z^2)}}.$$

Daher ist: $s = \text{arc}\left(\cos = \frac{\cos z}{\cos a}\right) + \text{const.}$ Soll also das Integral für $z = a$, d. h. für $x = 0$, verschwinden, so hat man die einfache Formel:

$$\cos z = \cos a . \cos s.$$

Nun ist aber auch in dem an S rechtwinkeligen Dreiecke PSM:

$\cos PM = \cos PS . \cos MS$ oder $\cos z = \cos a . \cos MS$; daher hat man: $\cos S = \cos MS$, oder es ist das Stück MS der Tangente gleich dem Bogen AM der Curve, wie bei der ebenen Kettenlinie.

Daher kann man sich die Kettenlinie als abgewickelt vorstellen. Das Loth PS lag nämlich anfänglich auf VA, und zwar S auf A und P auf V; bei dieser besonderen Abwickelung beschreibt nämlich das im Endpunkte S der gestreckten Curve AM oder SM errichtete Perpendikel PS, indem es die constante Länge des Parameters behält, mit seinem Endpunkte P einen Hauptkreis, und zwar die erste Axe der Curve.

§. 46.

Um die Lage der Tangente und insbesondere die Lage ihres Einschnitts T in die erste Axe nach ihrer Abhängigkeit von der Größe der Abscisse $VP = x$ darzustellen, formen wir den vorhin erhaltenen Ausdruck für tng PT noch um in:

$$\text{tng } PT = \frac{\text{tng } a . \text{tng } z}{\sqrt{(\text{tng } z^2 - \text{tng } a^2)}},$$

und es ist also: $\text{tng } PT = \dfrac{\text{tng } a}{\mathfrak{Tng}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}$. Beim Wachsen von x nähert sich aber $\mathfrak{Tng}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ ins Unendliche der Gränze Eins; daher ist PT immer $> a$ und nähert sich ins Unendliche abnehmend dem Werthe a des Parameters. Für den Scheitel A der Curve ist die Subtangente PT am größten, nämlich $= 90°$. Das Abnehmen von PT ist aber immer mehr und mehr retardirt.

Stellen wir auch die Größen φ, ψ und s in ihrer Abhängigkeit von der Abscisse x dar, so haben wir die einfachen Formeln:

$$\text{tng } s = \sin a . \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

$$\cos \varphi . \mathfrak{Cos} \frac{x}{\alpha} = \cos a,$$

$$\cos \psi = \mathfrak{Tng}\left(\frac{x}{\alpha}\right) . \cos a;$$

und aus der letzten Formel folgt dann noch:

$$\text{tng } PT . \cos \psi = \sin a.$$

Setzt man $x = \frac{1}{0}$, so hat man $\text{tng } s = \frac{1}{0}$, und also $s = \frac{\pi}{2}$

zum Ausdrucke der Länge eines ganzen Armes der Kettenlinie zwischen dem Scheitel A und dem Asymptotenpunkte Q; daher ist die ganze Kettenlinie $= \pi$, d. h., so lang, als die Hälfte eines Hauptkreises, welche Größe auch immer der Parameter a der Curve haben mag.

§. 47.

Auch die Quadratur der Kettenlinie führt zu einem einfachen Resultate. Das Differenzial der Fläche ist nämlich: $\partial f = \sin z \,.\, \partial x$, und also:

$$\partial f = \frac{\sin a \,.\, \sin z \,.\, \partial z}{\cos z \,.\, \sqrt{(\cos a^2 - \cos z^2)}}.$$

Führt man den Bogen s sammt seinem Differenziale ein, so hat man:

$$\partial f = \operatorname{tng} a \,.\, \frac{\partial s}{\cos s},$$

und also: $f = \operatorname{tng} a \,.\, \mathfrak{L}s$, wenn das Integral für $x = o$ und also auch für $s = o$ verschwinden soll. Wie in der Planimetrie bei den Spirallinien hat man auch hier zu bedenken, daß, wenn der Bogen s länger, als ein Gewinde, genommen wird, man eine Fläche erhält, die zum Theil über einander liegt, wovon also wieder ein Theil abgenommen werden muß.

Man hat also auch: $\mathfrak{Tng}\,(f \cot a) = \mathfrak{Tng}\,\mathfrak{L}s = \sin s$.

$$\text{und } \mathfrak{Cos}\,(f \cot a) = \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}s = \frac{1}{\cos s} = \frac{\cos z}{\cos a}.$$

§. 48.

Um einen allgemeinen Ausdruck für die Größe des Krümmungshalbmessers r zu finden, setzen wir wieder $\partial\,(p \cos z) = q\,\partial z$ und erhalten:

$$q = \frac{-\sin a \,.\, \sin z \,.\, \cos z}{\sqrt{(\sin z^2 - \sin a^2)^3}}.$$

Auch ist: $pv \sin z - q = \dfrac{\sin a \,.\, \operatorname{tng} z}{\sqrt{(\sin z^2 - \sin a^2)^3}}$, und also:

$$\operatorname{tng} r = \frac{\cos z \,.\, \sin z^2}{\sin a}.$$

Für $z = 90^\circ$ ist: $\operatorname{tng} r = o$; d. h., für den Punkt Q der Curve ist ihre Krümmung unendlich groß, und zwar eben deßwegen, weil das letzte Gewinde der Curve sich unendlich nahe an den Punkt Q legt.

Man hat auch: $\operatorname{tng} r = \dfrac{\cos z - \cos z^3}{\sin a} = \dfrac{\cos a \cos s - \cos a^3 \cos s^3}{\sin a}.$

Bei der ebenen Kettenlinie ist der Krümmungshalbmesser immer der Normale gleich. Bezeichnen wir diese mit N, so ist nun:

$$\text{tng } N . \sin \psi = \text{tng } z,$$

$$\text{und also tng } N = \frac{\sin z^2}{\sin a . \cos z}.$$

Daher ist nun: tng $r = \text{tng } N . \cos z^2$, also r immer kleiner, als N, und zwar desto mehr, je größer x oder auch z wird.

Zusatz. Die Gleichung der ebenen Kettenlinie ist $z = a \text{ Cos}\left(\frac{x}{a}\right)$, und wenn man ihre Ebene zu einer Cylinderfläche krümmt, daß die erste Axe ein Kreis wird, so kann eine Kugel, deren Radius mit dem Radius jenes Kreises übereinstimmt, die Cylinderfläche innerlich in diesem Kreise berühren. Projizirt man dann vom Mittelpunkte der Kugel aus die Kettenlinie aus der Cylinderfläche auf die Fläche der Kugel, so ist die Projection die eben beschriebene sphärische Kettenlinie.

Anhang.

Wenn in der Gleichung $P . t + Q . u = A$, die beiden Größen P und Q als Functionen einer und derselben dritten Größe und daher Functionen von einander sind, hingegen A eine Constante bedeutet, so ändert der Hauptkreis, wozu die Gleichung gehört, seine Lage — man erhält eine stetige Folge von Hauptkreisen, deren jeder vom nächstfolgenden geschnitten wird, und es ist schon im §. 32 ein Ausdruck für das Winkeldifferenzial hergeleitet worden, welches diesem Schneiden entspricht. Die Gleichung an den folgenden Hauptkreis ist nämlich:

$$\partial P . t + \partial Q . u = o.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen verbunden, so findet man die Axen-Coordinaten des Durchschnittspunktes mittelst ihrer trigonometrischen Tangenten t und u; nämlich:

$$t = \frac{A \partial Q}{P \partial Q - Q \partial P} \text{ und } u = \frac{-A \partial P}{P \partial Q - Q \partial P}.$$

Da nun aber ein Zusammenhang zwischen P und Q Statt findet, welcher durch die Gleichung $\varphi(P, Q) = o$ angedeutet seyn mag, so kann man aus diesen drei Gleichungen die Größen P und Q eliminiren, wodurch man zu einer Gleichung $\psi(t, u) = o$ zwischen t und u an eine Curve gelangt, in welcher die Durchschnittspunkte der stetig auf einander folgenden Hauptkreise liegen. Obgleich die Herleitung der Gleichung $\psi(t, u) = o$ an diese Curve eine Elimination zweier Größen voraussetzt, so können wir gleichwohl

an den Durchschnittspunkt M oder (t, u) dieser Curve eine Tangente legen.

Die Gleichung an diese Tangente ist nämlich:

$$y - u = \frac{\partial u}{\partial t}(x - t),$$

wenn unter (x, y) ein willkürlicher Punkt derselben verstanden wird. Differenziirt man aber die Gleichung:

$$P \,.\, t + Q \,.\, u = A,$$

indem man P und Q, t und u als veränderlich ansieht, so erhält man:

$$P\partial t + t\partial P + Q\partial u + u\partial Q = o;$$

und wird hiervon die Gleichung $t\partial P + u\partial Q = o$ subtrahirt, so bleibt nur noch:

$$P \,.\, \partial t + Q\partial u = o$$

$$\text{oder } \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{P}{Q} \,.$$

Dasselbe Differenzialverhältniß findet man auch, wenn man die vorhin für t und u aufgestellten Ausdrücke differenziirt. Daher ist denn die Gleichung an die Tangente der Curve:

$$y - u = -\frac{P}{Q}(x - t),$$

oder: $Qy - Qu + Px - Pt = o$, und wird sie zu der Gleichung $Pt + Qu = A$ addirt, so findet man:

$$P \,.\, x + Qy = A;$$

d. h., der durch M gehende und in M vom nächstfolgenden geschnittene Hauptkreis selbst ist eine Berührungslinie der Curve für den Punkt M derselben.

Wenn also nach irgend einem Gesetze auf einander folgende Hauptkreise gezogen werden, so kann man sie alle als Berührungslinien einer Curve ansehen, und wenn das erwähnte Gesetz durch eine Gleichung $\varphi(P, Q) = o$ ausgedrückt ist, so kann daraus die Gleichung an die Curve hergeleitet werden.

Was hier von Hauptkreisen bewiesen ist, kann leicht auf beliebige Curven ausgedehnt werden, die nach irgend einem Gesetze stetig auf einander folgen.

Von den sphärischen Linien der zweiten Ordnung.

§. 49.

Die allgemeinste Form der Gleichung an eine Linie der zweiten Ordnung oder an einen sphärischen Kegelschnitt ist:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o,$$

wenn ein Punkt M der Curve mit (x, y) bezeichnet wird. Aber ungeachtet diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung an die

ebenen Kegelschnitte der Form nach zusammenfällt, so ist gleichwohl die Discussion derselben ungleich größeren Schwierigkeiten ausgesetzt.

Die meisten Schwierigkeiten fallen aber weg, wenn man durch eine Coordinaten-Verwandlung bewirkt hat, daß die Glieder $2Dy$ und $2Ex$ in der Gleichung fehlen, was, wie später gezeigt werden wird, immer bewirkt werden kann. Die Gleichung hat dann die einfachere Form:

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + G = o;$$

aber der neue Anfangspunkt hat dann gegen die Curve eine besondere Lage. Zieht man eine Gerade durch ihn, so ist ihre Gleichung von der Form:

$$y = \alpha \, . \, x,$$

und verbinden wir diese Gleichung mit der vorigen, so erhalten wir die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte M und M′, die wir mit (x, y) und $(x' \; y')$ bezeichnen. Es finden sich:

$$x = + \sqrt{\frac{-G}{A\alpha^2 + 2B\alpha + C}}; \quad x' = - \sqrt{\frac{-G}{A\alpha^2 + 2B\alpha + C}};$$

$$y = + \alpha \, . \sqrt{\frac{-G}{A\alpha^2 + 2B\alpha + C}}; \quad y' = - \alpha \sqrt{\frac{-G}{A\alpha^2 + 2B\alpha + C}};$$

und also: $\pm\sqrt{(1 + x^2 + y^2)} = \sqrt{(1 + x'^2 + y'^2)}$; d. h., der neue Anfangspunkt halbirt dann die Sehne MM′ in allen ihren Lagen und heißt deßwegen der **Mittelpunkt** des Kegelschnitts; jede durch ihn gehende sphärische Sehne aber heißt ein **Durchmesser** der Curve.

Aber in Hinsicht auf den Mittelpunkt herrscht eine große Verschiedenheit zwischen den ebenen und sphärischen Kegelschnitten.

Anmerkung. Wenn der Axenwinkel kein rechter, sondern $= v$ ist, so hat man gleichwohl: $\pm\sqrt{(1 + x^2 + y^2 + 2xy \cos v)} = \sqrt{(1 + x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos v)}$; d. h., der neue Anfangspunkt halbirt die Sehne MM′, wie vorhin.

§. 50.

Um nun aus der allgemeinen Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ die Lage des Mittelpunktes zu finden, nehmen wir die Coordinaten-Verwandlung wirklich vor, indem wir für x und y die beiden folgenden Ausdrücke substituiren:

$$\frac{p + qx + ry}{\alpha - \beta x - \gamma y} \text{ und } \frac{p' + q'x + ry}{\alpha - \beta x - \gamma \, . \, y}.$$

Die Fortschaffung der Nenner gibt dann die Gleichung:

$$A(p' + q'x + r'y)^2 + 2B(p + qx + ry)(p' + q'x + r'y) + C(p + qx + ry)^2 + 2D(p' + q'x + r'y)(\alpha - \beta x - \gamma y) + 2E(p + qx + ry)(\alpha - \beta x - \gamma y) + G(\alpha - \beta x - \gamma y)^2 = o,$$

welche durch weitere Entwickelung wieder die Form der vorigen erhält, nämlich:

$A'y^2 + 2B'xy + C'x^2 + 2D'y + 2E'x + G' = o.$

Die Constanten dieser Gleichung sind, ausgedrückt durch die Constanten der vorigen, die folgenden:

$A' = Ar'^2 + 2Brr' + Cr^2 - 2Dr'\gamma - 2Er\gamma + G\gamma^2,$

$B' = Aq'r' + Bqr' + Brq' + Cqr - Dq'\gamma - Dr'\beta - Eq\gamma - Er\beta + G\beta\gamma,$

$C' = Aq'^2 + 2Bqq' + Cq^2 - 2Dq'\beta - 2Eq\beta + G\beta^2,$

$D' = Ap'r' + Bpr' + Brp' + Cpr - Dp'\gamma + Dr'\alpha - Ep\gamma + Er\alpha - G\alpha\gamma,$

$E' = Ap'q' + Bpq' + Bqp' + Cpq - Dp'\beta + Dq'\alpha - Ep\beta + Eq\alpha - G\alpha\beta,$

$G' = Ap'^2 + 2Bpp' + Cp^2 + 2Dp'\alpha + 2Ep\alpha + G\alpha^2.$

Wird der neue Anfangspunkt V' oder (t, u) mit dem vorigen V durch eine Linie VV' = c verbunden, welche mit den vorigen Axen die Winkel m und n, deren Verlängerung aber mit den beiden neuen Axen die Winkel m' und n' einschließt, so hat man nach §. 19:

$v = m + n$ und $v' = m' + n'$, ferner:

$p = \sin c \,.\, \sin n;\ q = \sin n \cos m' \cos c + \cos n \sin m';$
$r = \sin n \cos n' \cos c - \cos n \sin n';$

$p' = \sin c \,.\, \sin m;\ r' = \sin m \cos n' \cos c + \cos m \sin n';$
$q' = \sin m \cos m' \cos c - \cos m \sin m';$

$\alpha = \cos c \sin v;\ \beta = \sin c \,.\, \cos m' \sin v;\ \gamma = \sin c \,.\, \cos n' \sin v.$

§. 51.

Soll nun der neue Anfangspunkt V' der Mittelpunkt seyn, so muß die umgeformte Gleichung die einfachere Form:

$$A'.y^2 + 2B'xy + C'x^2 + G' = o,$$

haben; d. h., es muß $D' = o$ und $E' = o$ seyn. Die Ausdrücke für D' und E' lassen sich aber darstellen, wie folgt:

$(Ap' + Bp + D\alpha).r' + (Bp' + Cp + E\alpha).r - (Dp' + Ep + G\alpha).\gamma = D',$

$(Ap' + Bp + D\alpha).q' + (Bp' + Cp + E\alpha).q - (Dp' + Ep + G\alpha).\beta = E',$

und weil $t = \frac{p}{\alpha}$ und $u = \frac{p'}{\alpha}$ ist, so hat man, wenn zu noch größerer Abkürzung für den Augenblick gesetzt wird:

$$a = \frac{q}{\beta};\ a' = \frac{q'}{\beta};\ b = \frac{r}{\gamma} \text{ und } b' = \frac{r'}{\gamma},$$

die beiden Gleichungen:

$$(Au + Bt + D)\, b' + (Bu + Ct + E)\, b = Du + Et + G,$$
$$(Au + Bt + D)\, a' + (Bu + Ct + E)\, a = Du + Et + G,$$

welche umgeformt werden können in:

$$\frac{Au + Bt + D}{Du + Et + G} = \frac{b - a}{ba' - ab'} \text{ und } \frac{Bu + Ct + E}{Du + Et + G} = \frac{a' - b'}{ba' - ab'}.$$

Werden aber die Werthe:

$$a = \frac{\sin n \cos m' \cos c + \cos n \sin m'}{\sin c \cos m' \sin(m+n)}, \quad a' = \frac{\sin m \cos m' \cos c - \cos m \sin m'}{\sin c \cos m' \sin(m+n)},$$

$$b = \frac{\sin n \cos n' \cos c - \cos n \sin n'}{\sin c \cos n' \sin(m+n)}, \quad b' = \frac{\sin m \cos n' \cos c + \cos m \sin n'}{\sin c \cos n' \sin(m+n)},$$

substituirt, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\frac{Bu+Ct+E}{Du+Et+G} = \operatorname{tng} c . \cos m \text{ und } \frac{Au+Bt+D}{Du+Et+G} = \operatorname{tng} c . \cos n,$$

oder (nach §. 4) endlich:

$$\frac{Bu+Ct+E}{Du+Et+G} = t+u \cos v \text{ und } \frac{Au+Bt+D}{Du+Et+G} = u+t \cos v,$$

und diese beiden Gleichungen, woraus der neue Anfangspunkt V' oder (t, u), welcher zugleich der gesuchte Mittelpunkt ist, bestimmt werden kann, sind gleichbedeutend mit den Gleichungen $D'=o$ und $E'=o$. Eliminirt man von den beiden Größen t und u eine aus den beiden Gleichungen, so findet man zur Bestimmung der anderen eine cubische Gleichung, woraus geschlossen wird, daß ein sphärischer Kegelschnitt mehr als Einen Mittelpunkt haben kann, und es wird bald nachher sich zeigen, daß er wirklich drei reelle Mittelpunkte hat, einen inneren und zwei äußere. Auch wird dann Rechenschaft gegeben werden können von der Form der so eben erhaltenen beiden Gleichungen.

§. 52.

Um durch einen Punkt M oder (x, y) des Kegelschnitts eine Tangente zu legen, hat man die Gleichung:

$$y'-y = \frac{\partial y}{\partial x}(x'-x),$$

und wenn wir aus der Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=o$ das erste Differenzialverhältniß ziehen, so ist es:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{By+Cx+E}{Ay+Bx+D};$$

daher ist die Gleichung: $y'-y = -\frac{By+Cx+E}{Ay+Bx+D}(x'-x)$, oder auch:

$$(Ay+Bx+D).y'+(By+Cx+E)x'+Dy+Ex+G=o.$$

Man kann diese Gleichung auch also ordnen:

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+G=o.$$

Wenn mit der Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=o$ die Gleichung $ay+bx=c$ an einen Hauptkreis zusammengehalten wird, so gibt es eine Bedingungsgleichung für die Constanten der

beiden Gleichungen, welche erfüllt seyn muß, wenn sich die beiden Linien berühren sollen. Man findet, wie in der Planimetrie, die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(B^2-AC).c^2+2(BD-AE)bc+(D^2-AG)b^2+2(BG-DE)ab$$
$$+2(BE-CD)ac+(E^2-CG)a^2=o.$$

Die Gleichung an die erste Axe ist $y=o$, und wenn sie von der Curve berührt werden soll, so hat man die Bedingungsgleichung $E^2=C.G$; eben so hat man die Bedingung $D^2=A.G$, wenn die zweite Axe von der Curve berührt werden soll.

§. 53.

Es läßt sich auch, wenn ein Punkt P gegeben ist, die Gleichung an ein System zweier durch ihn gehenden Hauptkreise finden, welche beide einen gegebenen Kegelschnitt berühren, dessen Gleichung wie vorhin seyn mag:

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=o.$$

Es sey der Punkt P bezeichnet mit (x', y'); die Gleichung an den einen Hauptkreis sey:

$$y-y'=\alpha\,(x-x'),$$

und an den anderen: $y-y'=\alpha'\,(x-x')$.

Man hat also: $y-\alpha x=y'-\alpha x'$, und die Bedingung, daß dieser Hauptkreis den Kegelschnitt berühre, ist also:

$$(B^2-AC)\,(y'-\alpha x')^2+2(AE-BD).\alpha(y'-\alpha x')+(D^2-AG)\,\alpha^2$$
$$+2(DE-BG)\alpha+2(BE-CD)\,(y'-\alpha x')+E^2-CG=o.$$

Wird die Gleichung nach Potenzen von α geordnet, so erhält man:

$$\alpha^2-2\alpha\left[\frac{(B^2-AC)x'y'-(AE-BD)y'-(CD-BE)\,x'+BG-DE}{(B^2-AC)x'^2-2(AE-BD)x'+D^2-AG}\right]$$
$$+\frac{(B^2-AC)y'^2+2(BE-CD)y'+E^2-CG}{(B^2-AC)x'^2-2(AE-BD)\,x'+D^2-AG}=o.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind α und α', und man hat:

$$\alpha+\alpha'=2.\frac{(B^2-AC)x'y'-(AE-BD)y'-(CD-BE)x'+BG-DE}{(B^2-AC)x'^2-2(AE-BD)x'+D^2-AG},$$

$$\alpha.\alpha'=\frac{(B^2-AC)y'^2-2(CD-BE)y'+E^2-CG}{(B^2-AC)x'^2-2(AE-BD)x'+D^2-AG}.$$

Aber die Gleichung an das System der beiden Hauptkreise ist:

$$(y-y')^2-(\alpha+\alpha')\,(y-y')\,(x-x')+\alpha\alpha'(x-x')^2=o,$$

und werden hierin die vorhin gefundenen Werthe substituirt, so hat man die Gleichung:

$$(y-y')^2\,[(B^2-AC)x'^2-2(AE-BD)x'+D^2-AG]$$
$$-2(y-y')\,(x-x').[(B^2-AC)\,x'y'-(AE-BD)y'-(CD-BE)\,x'$$
$$+BG-DE]$$
$$+(x-x')^2.[(B^2-AC)y'^2-2(CD-BE)y'+E^2-CG].$$

Sie gestattet noch eine Reduction und ist dann:

$$(D^2-AG)(y-y')^2+(B^2-AC)(xy'-yx')^2+(E^2-CG)(x-x')^2 + 2(AE-BD)(y-y')(xy'-yx')+2(BE-CD)(x-x')(xy'-yx') + 2(DE-BG)(y-y')(x-x')=o.$$

Wenn der Punkt P zugleich der Anfangspunkt ist, so hat man die einfachere Gleichung:

$$(D^2-AG)y^2+(E^2-CG)x^2+2(DE-BG)xy=o.$$

Wenn $D^2-AG=o$ und $E^2-CG=o$ ist, d. h., wenn die beiden Coordinaten-Axen selbst Berührungslinien der Curve sind, so erhält man die einfache Gleichung $xy=o$ für das System der beiden berührenden Hauptkreise, wie auch seyn muß; denn $xy=o$ ist die Gleichung an das System der beiden Coordinaten-Axen selbst.

§. 54.

Die auf die Ziehung der Berührungslinien Bezug habenden Constructionen stehen im engen Zusammenhange mit der harmonischen Theilung. Ein Bogen ABCD (Fig. 9) heißt (in den genannten vier Punkten A, B, C, D) harmonisch getheilt, wenn

$$\sin AB.\sin CD=\sin BC.\sin AD$$

ist, und es läßt sich diese Gleichung umformen in:

$$\sin AC.\sin BD=2.\sin AB.\sin CD=2.\sin BC.\sin AD.,$$

oder auch in: $2\cot AC=\cot AB+\cot AD$. Ist ferner Q die Mitte von AC, so hat man noch:

$$\operatorname{tng} QA^2=\operatorname{tng} QC^2=\operatorname{tng} QB.\operatorname{tng} QD.$$

Aber für die analytische Sphärik bedarf es einer allgemeineren Umformung, welche man erhält, wenn man in dem harmonisch getheilten Bogen einen willkürlichen Punkt P annimmt, um die Lage oder Entfernung der Theilpunkte A, B, C, D in Beziehung auf ihn zu bestimmen. Dem gemäß erhält man die Formel:

$$(\operatorname{tng} PB-\operatorname{tng} PA)(\operatorname{tng} PD-\operatorname{tng} PC)=(\operatorname{tng} PD-\operatorname{tng} PA)(\operatorname{tng} PC-\operatorname{tng} PB),$$

welche in so fern zu bemerken ist, als man sogleich übersieht, daß man in ihr die vier Größen tng PA, tng PB, tng PC, tng PD um eine und dieselbe fünfte willkürliche Zahl k vermehren darf, ohne daß dadurch die Gleichung gestört wird. Eine gleiche Bewandtniß hat es eben deßwegen auch mit der folgenden Gleichung, welche durch die Umformung der vorigen gefunden wird:

$$2.(\operatorname{tng} PA.\operatorname{tng} PC+\operatorname{tng} PB.\operatorname{tng} PD)=(\operatorname{tng} PA+\operatorname{tng} PC)(\operatorname{tng} PB+\operatorname{tng} PD),$$ oder:

$$2.(\cot PA.\cot PC+\cot PB.\cot PD)=(\cot PA+\cot PC)(\cot PB+\cot PD).$$

§. 55.

Zieht man durch einen Punkt P oder (t, u) eine willkürliche Gerade, so ist ihre Gleichung:

$$y-u=\alpha.(x-t).$$

Die Curve, deren Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=o$ seyn mag, werde davon in den Punkten M und N geschnitten. Wenn α seinen Werth ändert, d. h., wenn sich die gezogene Gerade um den Punkt P drehet, so rücken die Punkte M und N in veränderlichen Abständen von P auf dem Umfange der Curve fort. Aber wie sich auch immer die Linie PMN um P drehen mag, so gibt es gleichwohl einen festen, dem Punkte P zugehörigen Hauptkreis, wovon die Linie PMN in einem vierten Punkte Q so geschnitten wird, daß PMQN harmonisch getheilt sey, oder:

$$\sin PM.\sin QN=\sin MQ.\sin NP.$$

Es sey nämlich $ay+bx+c=o$ die Gleichung an den durch Q gehenden Hauptkreis, oder auch $a(y-u)+b(x-t)+au+bt+c=o$. Substituirt man darin $y-u=\alpha(x-t)$, so hat man zur Bestimmung von Q die Formel:

$$x-t=-\frac{au+bt+c}{a\alpha+b}.$$

Projizirt man die vier Punkte P, M, Q, N vom Cardinalpunkte Y der zweiten Axe auf die erste, und sind P′, M′, Q′, N′ der Reihe nach ihre Projectionen, so hat man also, wenn der Anfangspunkt mit V bezeichnet wird:

$$\text{tng } VQ'-\text{tng } VP'=-\frac{au+bt+c}{a\alpha+b}.$$

Um auch die Punkte M′ und N′ zu bestimmen, formen wir die Gleichung an die Curve um in:

$$A(y-u)^2+2B(y-u)(x-t)+C(x-t)^2+2p(y-u)+2q(x-t)+r=o,$$

indem wir zur Abkürzung setzen:

$$p=Au+Bt+D;\ q=Bu+Ct+E$$

$$r=Au^2+2Btu+Ct^2+2Du+2Et+G.$$

Wird nun wieder $y-u=\alpha(x-t)$ substituirt, so erhält man:

$$(x-t)^2+\frac{2(p\alpha+q)}{A\alpha^2+2B\alpha+C}(x-t)+\frac{r}{A\alpha^2+2B\alpha+C}=o,$$

und hieraus folgt:

$$(\text{tng } VM'-\text{tng } VP')+(\text{tng } VN'-\text{tng } VP')=\frac{-2(p\alpha+q)}{A\alpha^2+2B\alpha+C},$$

$$(\text{tng } VM'-\text{tng } VP').(\text{tng } VN'-\text{tng } VP')=\frac{r}{A\alpha^2+2B\alpha+C}.$$

Ist nun die Linie PMQN harmonisch getheilt, so ist es wegen der Projectibilität der harmonischen Theilung auch die Linie P'M'Q'N', und umgekehrt; daher hat man nach §. 55 die Gleichung:

$$2(\text{tng}\,VP'.\text{tng}\,VQ'+\text{tng}\,VM'.\text{tng}\,VN')=$$
$$(\text{tng}\,VP'+\text{tng}\,VQ')\,(\text{tng}\,VM'+\text{tng}\,VN'),$$

in der wir aber von jedes Linienstückes trigonometrischer Tangente subtrahiren tng VP', wodurch die Gleichung übergeht in:

$$2(\text{tng}\,VM'-\text{tng}\,VP')(\text{tng}\,VN'-\text{tng}\,VP')=(\text{tng}\,VQ'-\text{tng}\,VP')$$
$$(\text{tng}\,VM'-\text{tng}\,VP'+\text{tng}\,VN'-\text{tng}\,VP'),$$

und werden hierin die vorhin aufgestellten Ausdrücke substituirt, so erhält man die einfache Bedingungsgleichung:

$$r=\frac{(p\alpha+q)\,(au+bt+c)}{a\alpha+b},$$

welche für jeden Werth von α erfüllt seyn muß und daher in die beiden folgenden zerlegbar ist:

$$r.a=p\,(au+bt+c),$$
$$r.b=q\,(au+bt+c),$$

woraus noch folgt: $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$.

Setzt man daher a=p.k und b=q.k, so verwandelt sich die erste Gleichung in:

$$rpk=p\,(pku+qkt+c),$$
d. h., $c=k(r-pu-qt)$.

Daher ist die gesuchte Gleichung an den durch Q gehenden Hauptkreis:

$$p.k.y+q.k.x+k\,(r-pu-qt)=o,$$
oder: $py+qx+r-pu-qt=o$.

Werden für p, q, r die Werthe substituirt, so hat man noch einfacher:

$$(Au+Bt+D).y+(Bu+Ct+E).x+Du+Et+G=o.$$

Diese dem festen Punkte P in Beziehung auf einen sphärischen Kegelschnitt zugehörige Gerade heiße, wie in der Planimetrie, die Polare des Punktes P; der Punkt P heißt umgekehrt ihr Pol.

Jede durch den willkürlichen Punkt P gehende Sehne oder Secante PMN wird von ihr in einem Punkte Q harmonisch getheilt. Liegt der Punkt P im Innern des sphärischen Kegelschnitts, so liegt die Polare des Punktes P außerhalb des Kegelschnitts, und umgekehrt. Liegt der Punkt P in der Curve selbst, so geht seine Polare durch ihn und ist eine Tangente der Curve; denn in diesem Falle stimmt die Gleichung an die Polare mit der im §. 52 gefundenen Gleichung an die durch den Punkt P gehende Tangente völlig überein.

Ist P der Anfangspunkt der Coordinaten selbst, so ist die Gleichung an seine Polare:

$$D . y + E . x + G = o .$$

§. 56.

Wenn der Punkt P oder (t, u) außerhalb des Kegelschnitts liegt, so wird die Curve von seiner Polaren in zwei Punkten geschnitten. Bezeichnen wir einen dieser beiden Punkte mit (x′, y′), so ist also auch, eben weil er in der Polaren liegt:

$$(Au + Bt + D)\ y' + (Bu + Ct + E)\ x' + Du + Et + G = o,$$

oder, anders geordnet:

$$(Ay' + Bx' + D)\ u + (By' + Cx' + E)\ t + Dy' + Ex' + G = o.$$

Legen wir aber durch den Punkt (x′, y′) eine Tangente an die Curve, so ist ihre Gleichung:

$$(Ay' + Bx' + D)\ y + (By' + Cx' + E) x + Dy' + Ex' + G = o.$$

Ist nun: $y = u$, so ist offenbar auch: $x = t$; d. h., der Punkt P oder der Pol der Polaren liegt in einer jeden von den beiden Berührungslinien, welche durch die beiden Durchschnittspunkte der Curve und der Polaren gezogen werden, und ist also der Durchschnittspunkt dieser beiden Berührungslinien. Jede Berührungssehne ist also ein Stück von einer Polaren und ihr Pol ist der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten, welche durch die Endpunkte der Berührungssehne an die Curve gelegt werden.

Daher walten denn in Ansehung der die Tangenten, Pole und Polaren betreffenden Constructionen dieselben Gesetze ob, welche in der Planimetrie für die Kegelschnitte längst bekannt sind und hier nur wiederholt würden. Aber ein Gesetz macht hiervon eine Ausnahme: Wenn man nämlich die Mitte einer Berührungssehne mit ihrem Pole durch eine Gerade verbindet, so geht die Verlängerung derselben nicht immer, wie in der Planimetrie, durch den inneren Mittelpunkt der Curve.

§. 57.

Der Pol P steht mit der ihm zugehörigen Polaren, deren Gleichung ist:

$$(Au + Bt + D) . y + (Bu + Ct + E)x + Du + Et + G = o,$$

nicht immer in einem solchen Zusammenhange, daß er zugleich das sphärische Centrum dieses Hauptkreises wäre; denn die Gleichung an einen Hauptkreis, der den Punkt P zu seinem sphärischen Centrum hat, ist nach §. 6:

$$(u + t \cos v) . y + (t + u \cos v) . x + 1 = o.$$

Identifizirt man diese Gleichung mit der vorigen, d. h., setzt man:

$$\frac{Bu+Ct+E}{Du+Et+G}=t+u\cos v \text{ und } \frac{Au+Bt+D}{Du+Et+G}=u+t\cos v,$$

so hat man den Ausdruck der Bedingung, unter welcher der Punkt P zugleich das sphärische Centrum seiner Polaren ist. Diese beiden Gleichungen bestimmen, abgesehen von einer möglichen Zweideutigkeit, die Lage des Punktes P vollkommen, und sind dieselben, welche im §. 51 zur Bestimmung der Lage des Mittelpunktes der Curve selbst gefunden wurden.

Daher haben wir eine zweite geometrische Bedeutung des Mittelpunktes eines sphärischen Kegelschnitts; er ist nämlich derjenige Pol, welcher zugleich als das sphärische Centrum der ihm zugehörigen Polaren dient.

Liegt der Mittelpunkt P außerhalb des sphärischen Kegelschnitts, so können von ihm aus zwei Tangenten an die Curve gelegt werden, und da nach §. 56 die Berührungssehne ein Stück der Polaren des Punktes P und also zugleich ein Stück des Hauptkreises ist, welcher P zum sphärischen Centrum hat, so ist offenbar jede Tangente, so weit sie zwischen P und dem Berührungspunkte enthalten ist, gleich 90°.

Ein äußerer Mittelpunkt ist daher ein solcher, von welchem aus zwei Tangenten an die Curve gezogen werden können, so daß jede dieser beiden Tangenten zwischen jenem Punkte und dem Berührungspunkte die Länge von 90° hat. Der äußere Mittelpunkt trennt den sphärischen Kegelschnitt von einem symmetrischen (zugleich congruenten) anderen, und hat die Eigenschaft, daß er jede durch ihn gehende Gerade, wodurch die beiden Curven verbunden werden, halbirt. Ein solcher Durchmesser mag eben deßwegen ein äußerer genannt werden, und zwar nicht bloß deßwegen, weil er sich außerhalb des Kegelschnitts befindet, sondern eben sowohl deßwegen, weil er dem Kegelschnitte nicht an und für sich, sondern allererst in Bezug auf eine zweite, mit jener in nothwendiger Verbindung stehende symmetrische Curve zukommt. Dasselbe dient auch als Grund der Benennung „äußerer Mittelpunkt."

Wenn man den noch unbestimmten Punkt (x, y) mit P' bezeichnet, so kann man in Bezug auf ihn die beiden vorhin erhaltenen Gleichungen anders ordnen, wodurch man erhält:

$$(Ay+Bx+D)u+(By+Cx+E).t+Dy+Et+G=0$$

$$\text{und } (y+x\cos v).u+(x+y\cos v).t+1=0;$$

und werden nun die beiden Gleichungen identifizirt, so erhält man die beiden Bedingungen:

$$\frac{By+Cx+E}{Dy+Ex+G}=x+y\cos v \text{ und } \frac{Ay+Bx+D}{Dy+Ex+G}=y+x\cos v,$$

wodurch der Punkt P′, welcher von P um 90° absteht, bestimmt ist, und da diese Gleichungen mit den zur Bestimmung von P dienenden vorigen Gleichungen dieselben sind, so ist also auch P′ ein Mittelpunkt, und insbesondere ein äußerer Mittelpunkt, wenn P ein innerer war; die Polare des Punktes P geht daher durch P′ und die Polare des Punktes P′ geht umgekehrt durch P.

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen zur Bestimmung von P′ die Größe y, so erhält man eine cubische Gleichung zur Bestimmung von x; die eine Wurzel dieser Gleichung ist x, die andere t, und da die zugehörigen Punkte P′ und P um 90° von einander entfernt sind, so sind beide Punkte reel, wenn einer es ist, und daher sind auch die beiden Wurzeln t und x reel, wenn eine es ist. Eine cubische Gleichung kann aber nicht eine unmögliche und zwei mögliche Wurzeln haben; daher ist auch die dritte Wurzel derselben möglich.

Daher hat denn ein sphärischer Kegelschnitt drei Mittelpunkte P, P′, P″, die je zwei um 90° von einander entfernt sind, und also die Ecken eines sphärischen Dreiecks PP′P″ sind, worin jeder Winkel 90° hat. Denn was vorhin von P′ in Beziehung auf P bewiesen ist, gilt offenbar auch von P″ in Bezug auf P und P′.

Die Polare eines jeden dieser drei Punkte geht allemal durch die beiden anderen Punkte und fällt also mit der Gegenseite des Dreiecks PP′P″ zusammen. So weit eine solche Polare eine Sehne ist, ist sie auch ein Durchmesser und kann ein Hauptdurchmesser oder eine Axe des Kegelschnitts genannt werden.

Zusatz. Nimmt man an, daß der Winkel v=90° sey, so hat man zur Bestimmung der drei Mittelpunkte P, P′, P″ und also auch der drei Hauptdurchmesser die Gleichungen:

$$\frac{By+Cx+E}{Dy+Ex+G}=x \quad \text{und} \quad \frac{Ay+Bx+D}{Dy+Ex+G}=y.$$

Aus der ersten zieht man: $y=\frac{Ex^2+(G-C)x-E}{B-Dx}$, und wird dieser Werth in der zweiten substituirt, so erhält man die offenbar cubische Gleichung:

$$\frac{(AE-BD).x^2+(AG-AC+B^2-D^2).x+DB-AE}{(BE-CD)x+BG-DE}=\frac{Ex^2+(G-C)x-E}{B-Dx}.$$

Da jeder von den drei Mittelpunkten P, P′, P″ seinen Gegenpunkt hat, so wird durch diese sechs Punkte und die sich in ihnen schneidenden Hauptdurchmesser die Kugelfläche in acht Octanten getheilt.

§. 58.

Die Gleichung an die Tangente der Curve für den Punkt M oder (x, y) derselben ist nach §. 52:

$$(Ay + Bx + D) . y' + (By + Cx + E) . x' + Dy + Ex + G = o,$$

und der Zusammenhang zwischen x und y ist dann angegeben durch die Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ an die Curve selbst. Um das sphärische Centrum (t, u) dieses Hauptkreises zu bestimmen, vergleichen wir seine Gleichung mit der Gleichung:

$$(u + t \cos v) . y' + (t + u \cos v) . x' + 1 = o,$$

woraus auf der Stelle folgt:

$$\frac{Ay + Bx + D}{Dy + Ex + G} = u + t \cos v \text{ und } \frac{By + Cx + E}{Dy + Ex + G} = t + u \cos v.$$

Werden diese Gleichungen umgekehrt, so hat man:

$$x = \frac{AE - BD + (t + u \cos v)(D^2 - AG) + (u + t \cos v)(BG - DE)}{B^2 - AC + (t + u \cos v)(AE - BD) + (u + t \cos v)(CD - BE)},$$

$$y = \frac{CD - BE + (t + u \cos v)(BG - DE) + (u + t \cos v)(E^2 - GC)}{B^2 - AC + (t + u \cos v)(AE - BD) + (u + t \cos v)(CD - BE)}$$

und durch diese beiden Ausdrücke ist der Berührungspunkt M auf dem Umfange eines Kegelschnitts bestimmt für den Fall, daß die durch ihn zu legende Tangente einen gegebenen sphärischen Mittelpunkt M' oder auch (t, u) haben soll.

Ist M' der Anfangspunkt, so ist der berührende Hauptkreis offenbar die Cardinale und man erhält

$$x = \frac{AE - BD}{B^2 - AC} \text{ und } y = \frac{CD - BE}{B^2 - AC} \text{; also } \frac{x}{y} = \frac{AE - BD}{CD - BE}$$

zur Bestimmung des Berührungspunktes M. Wenn aber diese beiden Werthe der Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ nicht Genüge leisten, so ist M kein Berührungspunkt, sondern der Pol einer Polaren, deren sphärisches Centrum der Anfangspunkt ist, d. h., der Pol der Cardinalen. Wenn überhaupt die obigen allgemeinen Ausdrücke nicht auf die Curve passen, so ist der Punkt M oder (x, y) der gesuchte Pol einer Polaren, deren sphärisches Centrum M' oder (t, u) gegeben ist.

Anmerkung. In der Planimetrie ist der durch die Ausdrücke $x = \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$ und $y = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}$ bestimmte Punkt jedesmal der Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel. In der Sphärik hingegen ist M der Pol der Cardinalen, ohne ein Mittelpunkt der Curve zu seyn. Wird der Kegelschnitt auf eine Ebene projizirt, so ist die Projection des Poles der Cardinalen der Mittelpunkt des erhaltenen ebenen Kegelschnittes.

§. 59.

Setzt man zur Abkürzung: $N = B^2 - AC + (t + u\cos v)(AE - BD) + (u + t\cos v)(CD - BE)$ und $n = AE^2 - 2BDE + CD^2 + (B^2 - AC).G$, so findet man aus den obigen allgemeinen Ausdrücken:

$$Ay + Bx + D = \frac{n\ (u + t\cos v)}{N},$$

$$By + Cx + E = \frac{n\ (t + u\cos v)}{N},$$

$$Dy + Ex + G = \frac{n}{N},$$

also: $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = \frac{n}{N}[y(u + t\cos v) + x(t + u\cos v) + 1]$.

Soll also der Punkt M oder (x, y) ein Punkt der Curve und daher $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ seyn, so hat man die einfache Bedingungsgleichung: $y(u + t\cos v) + x(t + u\cos v) + 1 = o$; denn die Gleichung $n = o$ würde ausdrücken, daß die Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ einem Systeme von zwei Hauptkreisen angehörte.

Jene Gleichung war vorauszusehen, weil der Punkt M der Curve auch ein Punkt der Berührungslinie ist.

Werden in der Gleichung die Ausdrücke für x und y aus §. 58 substituirt, so verwandelt sie sich in:

$$(E^2 - GC)(u + t\cos v)^2 + 2(BG - DE)(t + u\cos v)(u + t\cos v) + (D^2 - AG)(t + u\cos v)^2 + 2(CD - BE).(u + t\cos v) + 2(AE - BD)(t + u\cos v) + B^2 - AC = o.$$

Diese ist nun die gesuchte Gleichung an eine zweite Curve, welche mit der ersten nach §. 25 in einer solchen Wechselbeziehung steht, daß die sphärischen Mittelpunkte der Tangenten der einen sich jedesmal in der anderen befinden. Jede Normale der einen ist auch eine Normale der anderen; auch ist nach §. 35 die Evolute der einen gleichfalls die Evolute der anderen. Endlich ergänzen sich ihre in dieselbe Normale fallenden Krümmungshalbmesser jedesmal zur festen Summe $= 90°$.

Wenn das Coordinaten-System rechtwinkelig ist, so wird die Gleichung, in der wir nun auch y für u und x für t schreiben, einfacher, nämlich:

$$(E^2 - GC).y^2 + 2(BG - DE)xy + (D^2 - AG)x^2 + 2(CD - BE)y + 2(AE - BD)x + B^2 - AC = o.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$A' = E^2 - CG,$
$B' = BG - DE,$
$C' = D^2 - AG,$
$D' = CD - BE,$
$E' = AE - BD,$
$G' = B^2 - AC,$

so ist die Gleichung: $A'y^2 + 2B'xy + C'x^2 + 2D'y + 2E'x + G' = o.$

Man kann die eine Curve etwa wegen der Wechselbeziehung die reciproke der anderen nennen.

In der Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ sind die Coefficienten D und E jeder gleich Null, wenn einer von den drei Mittelpunkten der Curve zum Anfangspunkte genommen wird, und umgekehrt. Wenn aber $D = E = o$ ist, so ist offenbar auch: $D' = E' = o$. Daher haben denn offenbar die beiden Curven dieselben drei Mittelpunkte.

Zusatz 1. Wenn für einen willkürlichen Anfangspunkt die Cardinale als eine Polare angesehen wird und $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ die Gleichung an einen Kegelschnitt ist, so ist der Pol dieser Polaren, welcher mit (t, u) bezeichnet seyn mag, bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$Au + Bt + D = o \text{ und } Bu + Ct + E = o,$$

woraus, wie im §. 58, folgt:

$$t = \frac{AE - BD}{B^2 - AC} \text{ und } u = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}.$$

Da nun aber die Gleichung an die reciproke Curve ist:

$$(E^2 - GC)y^2 + 2(BG - DE) \cdot xy + (D^2 - AG)x^2 + 2(CD - BE)y + 2(AE - BD)x + (B^2 - AC) = o,$$

so ist in Beziehung auf sie die Polare des Anfangspunktes ausgedrückt oder bestimmt durch die Gleichung:

$$(CD - BE)y + (AE - BD)x + B^2 - AC = o \text{ (nach §. 55)},$$

oder: $$\frac{CD - BE}{B^2 - AC} \cdot y + \frac{AE - BD}{B^2 - AC} x + 1 = o,$$

d. h.: $u.y + t.x + 1 = o.$

Die Polare des Anfangspunktes der reciproken Curve ist also ein Hauptkreis, dessen sphärisches Centrum der in Hinsicht auf die erste Curve bestimmte Pol der Cardinale ist. Da nun aber in Ansehung der besonderen Lage des Anfangspunktes im Voraus nichts festgestellt war, so haben wir das folgende allgemeine Theorem bewiesen: **Wenn von zwei Kegelschnitten k und k′ der eine der reciproke des anderen ist, so gehört zu einer Polaren p der einen Curve jedesmal eine Polare p′**

der anderen von der Art, daß das sphärische Centrum der einen jedesmal der Pol der anderen ist, und umgekehrt.

Zusatz 2. Wenn mit der Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=0$ die Gleichung $y \cot u+x \cot t=1$ zusammengehalten wird, so berühren sich die beiden Linien, wenn $(E^2-CG)\cot u^2+2(BG-ED)\cot t.\cot u+(D^2-AG)\cot t^2+2(BE-CD)\cot u+2(BD-AE)\cot t+B^2-AC=0$ ist. Setzt man in dieser Formel:

$$u=90°+u' \text{ und } t=90°+t',$$

ferner $\operatorname{tng} u'=y$ und $\operatorname{tng} t'=x$, so hat man die Gleichung: $(E^2-CG)y^2+2(BG-ED)xy+(D^2-AG)x^2+2(CD-BE)y+2(AE-BD)x+B^2-AC=0$; d. h., der Punkt (x, y) muß ein Punkt der reciproken Curve seyn, wenn die gegebene Curve vom Hauptkreise, dessen Gleichung $y \cot u+x \cot t=1$ ist, berührt werden soll. Der Punkt (x, y) ist aber offenbar das sphärische Centrum dieses Hauptkreises.

§. 60.

Die Constanten der beiden Gleichungen $Ay^2+2Bxy+Cy^2+2Dy+2Ex+G=0$ und $A'y^2+2B'xy+C'x^2+2D'y+2E'x+G'=0$ stehen in einem bemerkenswerthen Zusammenhange. Bildet man nämlich aus der letzten Gleichung die an die reciproke Curve, so muß man offenbar die erste Gleichung wieder finden; d. h., es muß die Gleichung $(E'^2-G'C').y^2+2(B'G'-D'E')xy+(D'^2-A'G')x^2+2(C'D'-B'E')y$ $2(A'E'-B'D')x+B'^2-A'C'=0$ wieder mit der Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=0$ zusammenfallen, und in der That erhält man, wenn zur Abkürzung wieder gesetzt wird:

$$n=AE^2-2BDE+CD^2+G(B^2-AC),$$

die folgenden einfachen Ausdrücke:
$E'^2-G'C'=n.A$; $B'G'-D'E'=nB$; $D'^2-A'G'=nC$; $C'D'-B'E'=nD$; $A'E'-B'D'=n.E$ und $B'^2-A'C'=n.G$. Werden sie substituirt, und wird dann der allen Gliedern gemeinschaftliche Factor n abgeworfen, so geht offenbar die erste Gleichung wieder hervor.

Bildet man ferner, dem Ausdrucke n ähnlich, den Ausdruck:

$$n'=A'E'^2-2B'D'E'+C'D'^2+G'(B'^2-A'C'),$$

so läßt er sich umformen in:

$$n'=\frac{(A'E'-B'D')^2-(D'^2-A'G')(B'^2-A'C')}{A'},$$

und also: $n' = \frac{n^2 . E^2 - n^2 CG}{E^2 - CG}$, oder einfacher:

$$n' = n^2.$$

§. 61.

Um nun einen allgemeinen Ausdruck für das Differenzial des Bogens $\partial s = \frac{v \partial x}{w^2}$ (nach §. 26) und auch für den Krümmungshalbmesser herzuleiten, setzen wir: $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; dann ist:

$$v = \sqrt{(1 + p^2 + (y - px)^2)}.$$

Aber: $p = -\frac{By + Cx + E}{Ay + Bx + D}$; also: $y - px = \frac{Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + Dy + Ex}{Ay + Bx + D}$,

$$\text{oder: } y - px = -\frac{(Dy + Ex + G)}{Ay + Bx + D}.$$

Daher ist:

$$v = \frac{\sqrt{[(Ay + Bx + D)^2 + (By + Cx + E)^2 + (Dy + Ex + G)^2]}}{Ay + Bx + D}.$$

Wird ferner gesetzt: $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, so findet man zunächst:

$$q = \frac{(By + Cx + D)(Ap + B) - (Ay + Bx + D)(Bp + C)}{(Ay + Bx + D)^2},$$

und wird für p der Werth $p = -\frac{By + Cx + E}{Ay + Bx + D}$ substituirt, so hat man:

$$q = \frac{(By + Cx + E) . [(B^2 - AC)x + BD - AE] + (Ay + Bx + D)[(B^2 - AC)y + BE - CD]}{(Ay + Bx + D)^3}.$$

Dieser Ausdruck gestattet aber eine namhafte Reduction, wodurch man findet:

$$q = -\frac{[AE^2 - 2BDE + CD^2 + G(B^2 - AC)]}{(Ay + Bx + D)^3},$$

$$\text{oder: } q = \frac{-n}{(Ay + Bx + D)^3}.$$

Nun ist aber der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser r nach §. 26:

$\operatorname{tng} r = \frac{\left(\frac{v}{w}\right)^3}{-q}$ und $w = \sqrt{(1 + x^2 + y^2)}$; also hat man:

$$\operatorname{tng} r = \frac{1}{n}\sqrt{\left[\frac{(Ay + Bx + D)^2 + (By + Cx + E)^2 + (Dy + Ex + G)^2}{1 + x^2 + y^2}\right]^3},$$

worin unter n, wie im §. 60, verstanden wird der constante Ausdruck:

$$n = AE^2 - 2BDE + CD^2 + G(B^2 - AC).$$

Diese Formel für tng r ist, angesehen die Vollständigkeit der Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$, sehr einfach.

Der Ausdruck für tng r ist: $= \frac{1}{o}$, und also: $r = 90°$, wenn $n = o$ ist. Die Bedingungsgleichung $n = o$ drückt aber aus, daß die Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ zerlegbar sey in zwei Gleichungen des ersten Grades, und also nicht einem sphärischen Kegelschnitte, sondern einem Systeme zweier Hauptkreise angehöre. Daher ist der Krümmungshalbmesser eines sphärischen Kegelschnitts immer $< 90°$, wenn man den ihm zugehörigen Krümmungskreis mit dem kleinsten Radius beschreibt, und $> 90°$, wenn man ihn aus einem Centrum beschreibt, welches der Gegenpunkt des vorigen ist.

§. 62.

Ein anderer charakteristischer Unterschied der ebenen und sphärischen Kegelschnitte in Ansehung der Mittelpunktsbestimmung wird gewonnen, wenn man die Linie untersucht, worin die Mittelpunkte aller sphärischen Kegelschnitte liegen, welche durch vier gegebene Punkte M, M′, N, N′ gehen. Man kann durch diese vier Punkte offenbar drei Systeme von zwei Hauptkreisen legen. Legen wir jetzt durch M und M′ den ersten und durch N, N′ den zweiten Hauptkreis, welcher den ersten in V schneiden mag unter einem Winkel $= v$, und nehmen wir diese beiden Hauptkreise zu Coordinaten-Axen, also V zum Anfangspunkte. Auch setzen wir: tng VM $= a$, tng VM′ $= a'$, tng VN $= b$, tng VN′ $= b'$. Ist nun $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ die Gleichung an den durch die vier Punkte M, M′, N, N′ gehenden Kegelschnitt, so hat man zur Bestimmung der Constanten die Gleichungen:

$$Ca^2 + 2Ea + G = o, \quad Ab^2 + 2Db + G = o,$$
$$Ca'^2 + 2Ea' + G = o, \quad Ab'^2 + 2Db' + G = o;$$

und hieraus folgt:

$$E = -G \cdot \frac{a + a'}{2aa'}; \; D = -G \cdot \frac{b + b'}{2bb'}; \; C = \frac{G}{aa'}; \; A = \frac{G}{bb'};$$

das Verhältniß $\frac{B}{G}$ aber bleibt unbestimmt. Werden die gefundenen Werthe substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{y^2}{bb'} + \left(\frac{2B}{G}\right) \cdot xy + \frac{x^2}{aa'} - \frac{b + b'}{bb'} y - \frac{a + a'}{aa'} x + 1 = o,$$

oder auch nach Wegschaffung der Nenner:

$$aa' \cdot y^2 + 2B \cdot xy + bb'x^2 - aa'(b + b')y - bb'(a + a')x + aa'bb' = o,$$

wenn man den Coefficienten von xy wieder mit 2B bezeichnet.

Bestimmt sind also nur die Coefficienten: $A = aa'$; $C = bb'$; $D = -aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)$; $E = -bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)$ und $G = aa'bb'$.

Wird der Mittelpunkt der Curve durch (t, u) bezeichnet, so ist nach §. 51:

$$Au + Bt + D = (Du + Et + G).(u + t \cos v),$$
$$Bu + Ct + E = (Du + Et + G).(t + u \cos v).$$

Um nun die Gleichung an den Ort des Punktes (t, u) zu erhalten, eliminirt man die Größe B, wodurch man erhält:

$$Au^2 - Ct^2 + Du - Et = (Du + Et + G).(u^2 - t^2),$$

und in der durch diese Gleichung ausgedrückten Curve liegen nun die Mittelpunkte aller der Kegelschnitte, welche durch die vier gegebenen Punkte M, M', N, N' gelegt werden können. Diese Curve gehört nun offenbar zu den Linien der dritten Ordnung, da hingegen die Ortscurve für die Mittelpunkte der ebenen Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Punkte gelegt werden können, bekanntlich wieder ein ebener Kegelschnitt ist.

Die gesuchte Curve geht offenbar durch den Anfangspunkt V, und also überhaupt durch die drei Durchschnittspunkte der drei Systeme von Hauptkreisen, welche ebenfalls durch die vier gegebenen Punkte gelegt werden können.

Werden für A, C, D, E, G die vorhin gefundenen Werthe substituirt, so erhält man:

$$aa'u^2 - bb't^2 + bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)t - aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)u = \left[aa'bb' - aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)u - bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)t\right].(u^2 - t^2).$$

§. 63.

In Fig. 10 sind durch die vier gegebenen Punkte M, M', N, N' die drei Liniensysteme VMM' und VNN', W'M'N' und WMN, M'UN und MUN' gelegt, welche sich in V, U, W schneiden.

Durch diese drei Punkte geht also die gefundene Linie der dritten Ordnung. Man kann aber noch mehrere Punkte finden, durch welche diese Linie ebenfalls geht. Setzt man nämlich in ihrer Gleichung $t = o$, so hat man:

$$\left[aa'u - aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)\right].u = \left[aa'bb' - aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)u\right].u^2.$$

Diese Gleichung ist theilbar durch u, und dieß gibt zu erkennen, daß die Curve durch den Anfangspunkt V (und also auch durch U und W) geht; sie ist aber auch theilbar durch aa', und nach Abwerfung dieser Factoren läßt sie sich unter folgende Form bringen:

$$\frac{\frac{1}{u}-u}{2}=\frac{1-bb'}{b+b'}.$$

Setzt man nun $u=\operatorname{tng} y$, so ist: $\frac{1}{u}-u=\cot y-\operatorname{tng} y=2\cot 2y$,

und also: $\operatorname{tng} 2y=\frac{b+b'}{1-bb'}=\frac{\operatorname{tng} VN+\operatorname{tng} VN'}{1-\operatorname{tng} VN.\operatorname{tng} VN'}=\operatorname{tng}(VN+VN')$,

oder: $y=\frac{VN+VN'}{2}$.

Daher geht die Ortscurve der Mittelpunkte auch durch die Mitte α von NN'; aus gleichem Grunde geht sie also auch durch die Mitte β von MM', durch die Mitte γ von MN, durch die Mitte η von M'N', und durch die Mitten ε und δ der beiden Diagonalen NM' und MN'; denn man hätte eben so wohl die Punkte W und U zu Anfangspunkten nehmen können.

Durch dieselben neun Punkte (dem Begriffe der Lage nach sind sie dieselben) geht aber auch bekanntlich in der Planimetrie diejenige Linie der zweiten Ordnung, in welcher die Mittelpunkte aller ebenen Kegelschnitte liegen, welche durch vier feste Punkte geschrieben sind.

§. 64.

Da die Gleichung an einen durch die vier Punkte M, M', N, N' beschriebenen Kegelschnitt ist:

$aa'y^2+2Bxy+bb'x^2-aa'(b+b')y-bb'(a+a')x+aa'bb'=o$,

so ist, wenn ein Pol (t, u) angenommen wird, die Gleichung an die ihm zugehörige Polare (nach §. 55):

$$\left[aa'u+Bt-aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)\right]y+(Bu+bb't-bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)x$$
$$-aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)u-bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)t+aa'bb'=o.$$

Diese Gleichung ist offenbar nur dann von B unabhängig, wenn $t=u=o$ ist, und zieht sich bei dieser Annahme zusammen auf:

$$aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right).y+bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)x=aa'bb',$$

$$\text{oder: }\frac{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)}{2}.y+\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)}{2}x=1;$$

d. h., wenn durch die vier Punkte M, M', N, N' beliebig viele Kegelschnitte beschrieben und einer von den drei Punkten U, V, W als Pol genommen wird, so hat er in Bezug auf alle diese Kegel-

schnitte eine und dieselbe Polare, und zwar ist WU die Polare für den Pol V, VU die Polare für den Pol W und VW die Polare für den Pol U.

Die so eben erhaltene Gleichung ist einfacher:

$$\left(\frac{\cot VN + \cot VN'}{2}\right).y + \left(\frac{\cot VM + \cot VM'}{2}\right).x = 1$$

und hätte auch leicht unmittelbar aus der im §. 54 angegebenen Formel $2 \cot AC = \cot AB + \cot AD$ hergeleitet werden können.

§. 65.

Die allgemeine Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ kann noch auf eine bemerkenswerthe Weise mittelst der Applicatenverhältnisse dargestellt werden. Führen wir zunächst die Axen-Coordinaten selbst ein, indem wir tng y für y und tng x für x schreiben. Die Gleichung ist dann:

$$A \operatorname{tng} y^2 + 2B \operatorname{tng} x . \operatorname{tng} y + C \operatorname{tng} x^2 + 2D \operatorname{tng} y + 2E \operatorname{tng} x + G = o.$$

Der Axenwinkel v habe eine unbestimmte Größe, und zur Abscisse x gehöre das Applicatenverhältniß φz; dann ist nach §. 3:

$$\operatorname{tng} y = \frac{\varphi z}{\cos x},$$

und wird dieser Werth substituirt, so erhält man nach Fortschaffung der Nenner die Gleichung:

$$A . \varphi z^2 + 2(B \sin x + D \cos x) . \varphi z + C \sin x^2 + 2E \sin x \cos x + G \cos x^2 = o,$$

oder: $$\varphi z^2 + 2\left(\frac{B \sin x + D \cos x}{A}\right)\varphi z + \frac{\cos x^2}{A}(C \operatorname{tng} x^2 + 2E \operatorname{tng} x + G) = o.$$

Diese Gleichung gibt auch für jeden Werth von x zwei verschiedene Werthe von φz, und wenn wir diese beiden Wurzeln mit φz und $\varphi z'$ andeuten, so ist offenbar:

$$\varphi z . \varphi z' = \frac{\cos x^2}{A}(\operatorname{tng} x^2 . C + 2E \operatorname{tng} x + G),$$

oder: $$\varphi z . \varphi z' = \frac{C}{A} \cos x^2 . \left(\operatorname{tng} x^2 + 2\frac{E}{C} \operatorname{tng} x + \frac{G}{C}\right).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hat, gleich Null gesetzt, auch zwei Wurzeln, die mit tng a und $-\operatorname{tng} b = \operatorname{tng} - b$ bezeichnet seyn mögen, und es ist also:

$$\operatorname{tng} x^2 + \frac{2E}{C} \operatorname{tng} x + \frac{G}{C} = (\operatorname{tng} x - \operatorname{tng} a)(\operatorname{tng} x + \operatorname{tng} b),$$

daher: $\varphi z \,.\, \varphi z' = \frac{C}{A} \cos x^2 \, (\text{tng}\, x - \text{tng}\, a) \,.\, (\text{tng}\, x + \text{tng}\, b)$.

Aber: $\text{tng}\, x - \text{tng}\, a = \frac{\sin (x-a)}{\cos a \cos x}$ und ~~tng (x+b)~~ tng x + tng b $= \frac{\sin (x+b)}{\cos b \cos x}$;

also hat man:

$$\varphi z \,.\, \varphi z' = \left(\frac{-C}{A \cos a \cos b}\right) . \sin (a-x) \,.\, \sin (b+x).$$

Wenn nun in Fig. 11 als Abscissenlinie angenommen wird die Sehne AB und V als Anfangspunkt, also VL $= 90°$ genommen wird, so ist: VA $= a$, VB $= b$, VP $= x$ und $\varphi z = \frac{\sin PM}{\sin LM}$; $\varphi z' = \frac{\sin PN}{\sin LN}$; daher denn:

$$\frac{\sin PM}{\sin LM} \cdot \frac{\sin PN}{\sin LN} = \left(\frac{-C}{A \cos a \cos b}\right) . \sin PA \,.\, \sin PB.$$

Wird noch eine Abscisse Vp genommen, so sind die zugehörigen Applicatenverhältnisse: $\frac{\sin pm}{\sin Lm}$ und $\frac{\sin pn}{\sin Ln}$; daher ist auch:

$$\frac{\sin pm}{\sin Lm} \cdot \frac{\sin pn}{\sin Ln} = \left(\frac{-C}{A \cos a \cos b}\right) . \sin pA \,.\, \sin pB.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen verbunden, so erhält man:

$$\left[\frac{\sin PM . \sin PN}{\sin LM . \sin LN}\right] : \left[\frac{\sin pm . \sin pn}{\sin Lm . \sin Ln}\right] = \frac{\sin PA \,.\, \sin PB}{\sin pA \,.\, \sin pB}.$$

Diese Gleichung ist unabhängig von der Lage des vorigen Anfangspunktes V; auch ist die Lage des Punktes L und der Sehne AB völlig willkürlich; daher drückt die gefundene Gleichung ein allen sphärischen Kegelschnitten gemeinschaftliches Gesetz aus in der Form einer Proportion, mittelst welcher man aus fünf gegebenen Punkten M, N, A, B und m den sechsten n finden kann.

§. 66.

Die so eben erhaltene allgemeine Proportion ist überhaupt der Ausdruck der metrischen Beziehung unter den Linienstücken dreier Hauptkreise, wovon jeder die beiden anderen und einen sphärischen Kegelschnitt schneidet. Diese drei Hauptkreise können aber willkürlich gelegt werden, und es können insbesondere ihre drei Durchschnittspunkte A, B, C, wie in Fig. 12, außerhalb des Kegelschnitts liegen. Es ist dann gleichwohl:

$$\left[\frac{\sin AD}{\sin CD} \cdot \frac{\sin AD'}{\sin CD'}\right] : \left[\frac{\sin BE}{\sin CE} \cdot \frac{\sin BE'}{\sin CE'}\right] = \frac{\sin AF . \sin AF'}{\sin BF . \sin BF'}.$$

Die drei Hauptkreise können auch so gelegt werden, daß der Kegel-

schnitt davon berührt wird, wie in Fig. 13. Dabei fallen die Punkte D' und D in Einen zusammen, eben so E' und E, auch F' und F, und man erhält also nun:

$$\left(\frac{\sin AD}{\sin CD}\right)^2 : \left(\frac{\sin BE}{\sin CE}\right)^2 = \left(\frac{\sin AF}{\sin BF}\right)^2,$$

oder auch: $\frac{\sin AD}{\sin CD} \cdot \frac{\sin CE}{\sin BE} \cdot \frac{\sin BF}{\sin AF} = 1.$

Werden also die drei Berührungspunkte mit den Scheiteln der Gegenwinkel durch drei Bogen größter Kreise BD, AE und CF verbunden, so schneiden sich diese in Einem Punkte. Man kann in Anwendung dieses Satzes also aus zwei Berührungspunkten D und E den Berührungspunkt F finden, wie in der Planimetrie.

Aehnliche Bestimmungen erhält man, wenn mehr als drei Hauptkreise von einem Kegelschnitte berührt werden, welche aber wegen ihrer allzu großen Uebereinstimmung mit den ähnlichen planimetrischen hier übergangen werden.

Die ganze Lehre von den Polaren läßt sich aus der im §. 65 gefundenen allgemeinen Proportion herleiten, worauf wir hier der Kürze wegen nicht eingehen. Statt dessen nehmen wir jetzt schon an, die Sehne AB in Fig. 11 sey die dem Pole L zugehörige Polare. Dann sind die Linien LMPN, LSVR und Lmpn harmonisch getheilt, und also: $\sin LM . \sin PN = \sin PM . \sin LN$, oder auch:

$$\frac{\sin PM}{\sin LM} = \frac{\sin PN}{\sin LN};$$

eben so ist: $\frac{\sin pm}{\sin Lm} = \frac{\sin pn}{\sin Ln}$.

Werden diese Werthe in der allgemeinen Proportion:

$$\left[\frac{\sin PM}{\sin LM} \cdot \frac{\sin PN}{\sin LN}\right] : \left[\frac{\sin pm}{\sin Lm} \cdot \frac{\sin pn}{\sin Ln}\right] = \frac{\sin PA . \sin PB}{\sin pA . \sin pB},$$

substituirt, so erhält man:

$$\left(\frac{\sin PM}{\sin LM}\right)^2 : \left(\frac{\sin pm}{\sin Lm}\right)^2 = \frac{\sin PA . \sin PB}{\sin pA . \sin pB}.$$

Ganz eben so ist nun auch:

$$\left(\frac{\sin PM}{\sin LM}\right)^2 = \left(\frac{\sin VS}{\sin LS}\right)^2 \cdot \frac{\sin PA . \sin PB}{\sin VA . \sin VB};$$

und wenn, wie im §. 65, angenommen wird, daß $VL = 90°$ sey, und wenn ferner gesetzt wird: $VS = VR = b$, $VA = \alpha$, $VB = \beta$, so hat man die einfache Gleichung:

$$\frac{\sin PM}{\sin LM} = \frac{\sin PN}{\sin LN} = \left(\frac{\operatorname{tng} b^2}{\sin \alpha . \sin \beta}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\sin PA . \sin PB)},$$

welche zugleich eine ziemliche Allgemeinheit hat. Wird die Sehne

AB willkürlich gewählt, so ist nun aber der Punkt L nicht mehr willkürlich; denn es soll L der Pol der Polaren AB seyn; die Lage des Punktes V aber ist, abgesehen von einer möglichen Zweideutigkeit (oder gar völligen Unbestimmtheit), der Bedingung unterworfen, daß VL = 90° seyn soll.

§. 67.

Um zu specielleren Formen der Gleichung an einen sphärischen Kegelschnitt überzugehen, ist der Beweis nöthig, daß, wenn aus einem der drei Mittelpunkte P als Centrum ein Hauptkreis beschrieben und ein Punkt (x′, y′) oder M seiner Peripherie als Pol angenommen wird, die ihm zugehörige Polare durch denselben Mittelpunkt P geht. Es werde dieser Mittelpunkt P bezeichnet mit (t, u); dann ist die Gleichung an den Hauptkreis, dessen Centrum er ist, offenbar:

$$(u+t \cos v).y+(t+u \cos v).x+1=o,$$

und da sich der Punkt M in seiner Peripherie befindet, so ist auch:

$$(u+t \cos v).y'+(t+u \cos v).x'+1=o.$$

Die Gleichung an die Polare des Punktes M aber ist:

$$(Ay'+Bx'+D)\ y+(By'+Cx'+E).x+Dy'+Ex'+G=o,$$

und weil der Punkt P ein Mittelpunkt der Curve, also

$$\frac{Au+Bt+D}{Du+Et+G}=u+t \cos v \text{ und } \frac{Bu+Ct+E}{Du+Et+G}=t+u \cos v$$

ist, so ist auch die Gleichung an den Hauptkreis, dessen Centrum er ist:

$$(Au+Bt+D)\ y+(Bu+Ct+E)\,x+Du+Et+G=o,$$

und, weil M ein Punkt seiner Peripherie ist, auch:

$$(Au+Bt+D)\ y'+(Bu+Ct+E)\ x'+Du+Et+G=o,$$

oder: $(Ay'+Bx'+D).u+(By'+Cx'+E).t+Dy'+Ex'+G=o$; und wird diese Gleichung mit der an die Polare des Punktes M zusammengehalten:

$$(Ay'+Bx'+D).y+(By'+Cx'+E)\,x+Dy'+Ex'+G=o,$$

so sieht man, daß, wenn $x=t$ genommen wird, auch $y=u$ gefunden wird, und also die Polare des Punktes M durch ihr sphärisches Centrum P geht, wenn P einer von den drei Mittelpunkten des Kegelschnitts ist.

§. 68.

Auf das so eben aufgestellte Theorem gründet sich der Begriff der conjugirten Durchmesser bei den sphärischen Kegelschnitten in Ansehung eines ihrer drei Mittelpunkte. Beschreibt man nämlich aus einem der drei Mittelpunkte P eines sphärischen Kegelschnitts

einen Hauptkreis, und wird nach einem Punkte M seiner Peripherie ein Radius gezogen, so wird ein Theil desselben und seiner Verlängerung eine reelle oder auch ideale Sehne, und, weil sie durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser. Wird dann der Endpunkt des gezogenen Radius als Pol betrachtet, so ist die ihm zugehörige Polare, welche nach §. 68 durch denselben Mittelpunkt geht, so weit sie eine Sehne ist, der dem erst genannten Durchmesser conjugirte andere Durchmesser. Zu jedem Durchmesser gehört also nur ein ihm conjugirter zweiter.

Wird der Mittelpunkt P zum Anfangspunkte genommen, während die Coordinaten-Axen eine unbestimmte Lage behalten, so ist: $t=u=o$, also auch: $D=E=o$. Der eine Durchmesser fällt nun in die Lage PM; seine Gleichung also ist nun:

$$y = \frac{y'}{x'} \cdot x.$$

Die Gleichung an den conjugirten Durchmesser würde aber nach §. 67 seyn:

$$(Ay' + Bx')\ y + (By' + Cx')\, x + G = o,$$

welche Gleichung offenbar falsch erscheint; denn ihr gemäß ginge der conjugirte Durchmesser nicht durch den Anfangspunkt P, weil in der Gleichung: $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + G = o$ die Constante G nicht $= o$ seyn kann. Diese Unrichtigkeit rührt aber nur von der Specialisirung her, wodurch der Punkt M in die Cardinale verlegt wird.

Seine Lage kann nun nicht mehr durch die Axen-Coordinaten arc $(tng = x')$ und arc $(tng = y')$ bestimmt werden (nach §. 1.). Aber das Verhältniß $\frac{y'}{x'}$, welches wir mit a bezeichnen wollen, bestimmt jetzt allein schon die Lage des Punktes M in der Cardinale.

Substituirt man aber in der Gleichung $(Ay'+Bx')\,y+(By'+Cx')\,x + G=o$ für y' den Werth ax' und dividirt man durch x', so erhält man:

$$(Aa + B)\ y + (Ba + C) \cdot x + \frac{G}{x'} = o,$$

oder weil $x' = \frac{1}{o}$ ist, so ist die Gleichung an den einen Durchmesser: $y = ax$, und die Gleichung an den ihm conjugirten Durchmesser:

$$(Aa + B) \cdot y + (Ba + C) \cdot x = o,$$

welcher gemäß er durch den Anfangspunkt P geht, wie schon im §. 67 bewiesen wurde.

Die letzte Gleichung stimmt ganz mit derjenigen überein, wodurch in der Planimetrie die Richtung des conjugirten Durchmessers bestimmt wird.

§. 69.

Die beiden Gleichungen $y = ax$ und $y = -\frac{Ba + C}{Aa + B}x$ an zwei conjugirte Durchmesser bestimmen die Form der Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + G = o$ für den Fall, daß die beiden conjugirten Durchmesser selbst zu Coordinaten-Axen genommen werden. Soll der erste zur ersten und der zweite zur zweiten Coordinaten-Axe werden, so müssen ihre Gleichungen die Formen $y = o$ und $x = o$ haben. Daher muß $a = o$ und $Aa + B = o$ oder $B = o$ seyn.

Die Gleichung an einen sphärischen Kegelschnitt, bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser als Coordinaten-Axen, ist daher von der Form:

$$Ay^2 + Cx^2 = G,$$

oder wenn unter A, D, G positive Zahlen verstanden werden, so hat man die drei Formen:

$$Ay^2 + Cx^2 = G; \; Ay^2 - Cx^2 = G \text{ und } -Ay^2 + Cx^2 = G,$$

wovon leicht gezeigt wird, daß sie sich auf die eben so vielen verschiedenen Mittelpunkte beziehen. Die erste Form bezieht sich offenbar auf den innern Mittelpunkt, und die beiden anderen Formen werden also zur Anwendung kommen, wenn einer der beiden äußeren Mittelpunkte zum Anfangspunkte genommen wird.

Den drei Gleichungen gemäß gehören nun zu jeder Abscisse x zwei gleich große, aber entgegengesetzte Werthe von y, und umgekehrt; aber nicht so verhält es sich mit den einer Abscisse x zugehörigen Applicaten; diese sind nur dann gleich groß, wenn der Winkel, welchen die beiden conjugirten Durchmesser einschließen, ein rechter ist und also diese Durchmesser zwei Hauptdurchmesser oder Axen sind.

§. 70.

Es sey $Ay^2 + Cx^2 = G$ die Gleichung an einen sphärischen Kegelschnitt, bezogen auf zwei Hauptmesser. Soll $x = \text{tng } a$ für $y = o$ und $y = b$ für $x = o$ seyn, so können die beiden Halbaxen a und b eingeführt werden, wodurch sich die Gleichung verwandelt in:

$$y^2 . \cot b^2 + x^2 \cot a^2 = 1.$$

Wenn $a = b = r$ ist, so hat man die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = \text{tng } r^2,$$

an den Kreis bezogen auf zwei Durchmesser desselben, welche sich unter rechten Winkeln schneiden. Um den Kreis auszuschließen, neh-

men wir an, daß $a > b$ sey. Die Gleichung $\frac{y^2}{\text{tng } b^2} + \frac{x^2}{\text{tng } a^2} = 1$ gehört dann keiner ebenen Curve an; denn jede ebene Curve auf der Oberfläche der Kugel ist ein Kreis. Es sey in Fig. 14 die große Halbare, $CA = CB = a$, und die kleine Halbare sey $CD = CE = b$. Von einem Punkte M der Curve werden die Perpendikel MP und MQ auf AB und ED gefällt und es sey $\text{tng } CP = x$, $\text{tng } CQ = y$, so ist die vorhin angegebene Gleichung construirt. Wird vom inneren Mittelpunkte C aus der Radius vector $CM = \varrho$ gezogen, und der Winkel $ACM = v$ gesetzt, so ist:

$$x = \text{tng } \varrho \cos v \text{ und } y = \text{tng } \varrho . \sin v.$$

Durch diese Substitution verwandelt sich die vorige Gleichung in:

$$\cot \varrho^2 = \cot a^2 . \cos v^2 + \cot b^2 . \sin v^2.$$

Zu jedem Werthe des Winkels v gehören also zwei gleich große und entgegengesetzte Werthe von ϱ, wie ohnehin bekannt ist; denn jede durch den inneren Mittelpunkt C gehende Sehne MM′ ist ein Durchmesser. Auch gehören der gefundenen Gleichung gemäß zu jedem Werthe von ϱ zwei solche Werthe von v, die entweder gleich groß und entgegengesetzt sind, oder sich zu 180° ergänzen. Jede zwei Durchmesser also, welche gegen die große Axe eine gleiche Neigung haben, sind gleich groß.

Die Gleichung $y^2 . \cot b^2 + x^2 . \cot a^2 = 1$ läßt sich auch im Gebrauche der Applicaten umformen in:

$$\text{tng } PM^2 = \frac{\text{tng } b^2}{\sin a^2} . \sin PA . \sin PB$$

$$\text{und tng } QM^2 = \frac{\text{tng } a^2}{\sin b^2} . \sin QD . \sin QE.$$

Zu jeder Abscisse CP gehören also nun zwei gleich große, aber entgegengesetzte Applicaten PM, und eben so auch zu jeder Abscisse CQ zwei gleich große, aber entgegengesetzte Applicaten QM.

Diese beiden Gleichungen sind specielle Formen von der am Schlusse des §. 66 aufgestellten allgemeineren, und vermitteln den Uebergang, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in einen der beiden äußeren Mittelpunkte verlegt werden soll.

§. 71.

Wenden wir die im §. 61. hergeleitete allgemeine Formel zur Berechnung des Krümmungshalbmessers an auf die Gleichung:

$$y^2 . \cot b^2 + x^2 . \cot a^2 = 1,$$

so ist: $A = \cot b^2$, $B = o$, $C = \cot a^2$, $D = o$, $E = o$ und $G = -1$; also ist: $n = \cot a^2 \cot b^2$, und daher:

$$\operatorname{tng} r = \operatorname{tng} a^2 . \operatorname{tng} b^2 \sqrt{\left[\frac{y^2 \cot b^4 + x^2 \cot a^4 + 1}{1 + x^2 + y^2}\right]^3}.$$

Wird der Krümmungshalbmesser für den Scheitel A mit p und für den Scheitel D mit q bezeichnet, so hat man offenbar:

$$\operatorname{tng} p = \frac{\operatorname{tng} b^2}{\operatorname{tng} a} \text{ und } \operatorname{tng} q = \frac{\operatorname{tng} a^2}{\operatorname{tng} b}$$

$$\text{also: } \frac{\operatorname{tng} p}{\operatorname{tng} q} = \frac{\operatorname{tng} b^3}{\operatorname{tng} a^3}$$

Diese beiden Krümmungshalbmesser mögen die den beiden Axen AB und CD zugehörigen **Parameter** heißen.

Man findet bald, daß der Parameter der großen Axe der kleinste und der Parameter der kleinen Axe der größte unter allen Krümmungshalbmessern der Curve ist. Durch die beiden Parameter ist also die größte und kleinste Krümmung des Kegelschnitts bestimmt.

Man findet noch: $\operatorname{tng} p . \operatorname{tng} q = \operatorname{tng} a . \operatorname{tng} b$, und es ist also rückwärts:

$$\operatorname{tng} b^3 = \operatorname{tng} p^2 . \operatorname{tng} q \text{ und } \operatorname{tng} a^3 = \operatorname{tng} q^2 . \operatorname{tng} p.$$

Durch die größte und kleinste Krümmung eines Kegelschnitts ist er also selbst völlig bestimmt.

§. 72.

Die Parameter p und q sind Constanten, welche sich mit Vortheil in die Gleichung an den Kegelschnitt einführen lassen, wenn der Anfangspunkt in einen der Scheitel der beiden Axen verlegt wird.

Um etwa den Anfangspunkt nach A zu verlegen, sey: PM = z und AP = x. Die Gleichung ist dann: $\operatorname{tng} z^2 = \frac{\operatorname{tng} b^2}{\sin a^2} \sin x . \sin(2a - x)$,

oder: $\operatorname{tng} z^2 = \frac{\operatorname{tng} b^2}{\operatorname{tng} a} \sin 2x - \frac{\operatorname{tng} b^2 \cos 2a}{\sin a^2} \sin x^2$.

Daher hat man weiter:

$$\operatorname{tng} z^2 = \operatorname{tng} p . \sin 2x - \frac{2 \operatorname{tng} p}{\operatorname{tng} 2a} . \sin x^2.$$

Wird aber QM = z und DQ = x gesetzt, so findet man auf ähnliche Art die Gleichung:

$$\operatorname{tng} z^2 = \operatorname{tng} q . \sin 2x - \frac{2 \operatorname{tng} q}{\operatorname{tng} 2b} . \sin x^2.$$

Wird PM = z und CP = x gesetzt, so ist die Gleichung:

$$\operatorname{tng} z^2 = \frac{\operatorname{tng} b^2}{\sin a^2} (\sin a^2 - \sin x^2) = \operatorname{tng} b^2 \left(1 - \frac{\sin x^2}{\sin a^2}\right),$$

und wird QM = z, CQ = x gesetzt, so ist die Gleichung:

$$\operatorname{tng} z^2 = \frac{\operatorname{tng} a^2}{\sin b^2} (\sin b^2 - \sin x^2) = \operatorname{tng} a^2 \left(1 - \frac{\sin x^2}{\sin b^2}\right).$$

Unter den auf der großen Axe genommenen Abscissen gibt es eine CF = Cf, deren zugehörige Applicate FN oder fn dem Parameter p dieser Axe gleich ist. Diese Abscisse werde mit e bezeichnet und die Excentricität genannt; die beiden Punkte F und f mögen die Brennpunkte heißen. Die unbekannte Excentricität findet man aus der Gleichung:

$$\text{tng } p^2 = \frac{\text{tng } b^4}{\text{tng } a^2} = \frac{\text{tng } b^2}{\sin a^2} (\sin a^2 - \sin e^2);$$

woraus folgt: $\text{tng } b^2 = \frac{(\cos e^2 - \cos a^2)}{\cos a^2}$, oder einfacher:

$$\cos a = \cos e \, . \cos b.$$

Dieser Formel gemäß ist e die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die große und dessen andere Kathete die kleine Halbaxe des Kegelschnitts ist. Wenn man also aus dem Scheitel D oder E der kleinen Axe mit einem Radius, welcher der großen Halbaxe gleich ist, einen Kreis beschreibt, so schneidet er die große Axe AB in den beiden gesuchten Brennpunkten F und f.

Der Zusammenhang zwischen dem Parameter p und der Excentricität wird dann ausgedrückt mittelst der Formel:

$$\text{tng } p = \frac{\cos e^2 - \cos a^2}{\sin a \cos a} = \frac{\cos 2e - \cos 2a}{\sin 2a}.$$

§. 73.

Zu den Eigenschaften der Brennpunkte gelangt man, indem man eine Gleichung zwischen dem Leitstrahle FM = r und seiner sphärischen Projection FP = α sucht, wobei wir von der Gleichung $\text{tng } z^2 = \frac{\text{tng } b^2}{\sin a^2} (\sin a^2 - \sin x^2)$ ausgehen, welche wir vorläufig umsetzen in $\text{tng } z^2 . \sin a^2 \cos a^2 = (\cos e^2 - \cos a^2) \sin a^2 - (\cos e^2 - \cos a^2) \sin x^2$. Es ist nun aber: $\cos r = \cos \alpha \cos z$, und daher:

$$\text{tng } z^2 = \frac{\text{tng } r^2 - \text{tng } \alpha^2}{1 + \text{tng } \alpha^2}.$$

Auch ist: $x = e - \alpha$, also: $\sin x^2 = (\sin e \cos \alpha - \cos e \sin \alpha)^2$, oder:

$$\sin x^2 = \frac{(\sin e - \cos e \text{ tng } \alpha)^2}{1 + \text{tng } \alpha^2}.$$

Werden diese Werthe substituirt, so findet man die Gleichung:

$$\sin a^2 \cos a^2 \text{ tng } r^2 = \sin e^2 \cos e^2 \text{ tng } \alpha^2 + 2 \sin e \cos e (\cos e^2 - \cos a^2) . \text{tng } \alpha^2 + (\cos e^2 - \cos a^2)^2.$$

Aus ihr aber kann die Quadratwurzel gezogen werden, wodurch man erhält:

$$\operatorname{tng} r = \operatorname{tng} p + \frac{\sin 2e}{\sin 2a} \cdot \operatorname{tng} \alpha.$$

Will man statt der Projection α den Winkel AFM einführen, welcher mit v bezeichnet und die wahre Anomalie genannt werden mag, so ist offenbar: $\operatorname{tng} \alpha = -\operatorname{tng} r \cdot \cos v$, und also:

$$\operatorname{tng} r = \frac{\operatorname{tng} p}{1 + \frac{\sin 2e}{\sin 2a} \cdot \cos v},$$

oder: $\cot r = \cot p \left(1 + \frac{\sin 2e}{\sin 2a} \cdot \cos v\right)$.

Wird diese Formel differenziirt, so erhält man:

$$\frac{\partial r}{\sin r^2} = \frac{\cot p \cdot \sin 2e}{\sin 2a} \cdot \sin v \cdot \partial v.$$

Schließt die Berührungslinie MT mit dem Leitstrahle FM des Punktes M den Winkel FMT $= \varphi$ ein, so ist nach §. 31:

$$\operatorname{tng} \varphi = \sin r \cdot \frac{\partial v}{\partial r},$$

und also: $\operatorname{tng} \varphi = \frac{\sin 2a \cdot \operatorname{tng} p}{\sin 2e \cdot \sin r \cdot \sin v}$.

Nun ist aber: $\sin r \cdot \sin v = \sin PM = \sin z$, also hat man auch:

$$\operatorname{tng} \varphi = \frac{\sin 2a \cdot \operatorname{tng} p}{\sin 2e \cdot \sin z}.$$

In diesem Ausdrucke ist keine Größe enthalten, welche geändert werden müßte, wenn man die Formel auf die Bestimmung des Winkels fMT' übertragen wollte, welchen der andere Leitstrahl fM mit der durch M gelegten Tangente TMT' einschließt: daher sind diese beiden Winkel immer gleich groß, wie in der Planimetrie.

§. 74.

Wird der Leitstrahl fM mit r' und das Verhältniß $\frac{\sin 2e}{\sin 2a}$ mit k bezeichnet, so ist nach §. 73:

$$\operatorname{tng} FP = \frac{\operatorname{tng} r - \operatorname{tng} p}{k} \text{ und } \operatorname{tng} fP = \frac{\operatorname{tng} r' - \operatorname{tng} p}{k}.$$

Da nun $FP + fP = 2e$ und also $\operatorname{tng} 2e = \frac{\operatorname{tng} FP + \operatorname{tng} fP}{1 - \operatorname{tng} FP \cdot \operatorname{tng} fP}$ ist, so hat man nach Substitution der vorigen Werthe und Fortschaffung des Nenners die Gleichung:

$$\sin 2a \cdot \operatorname{tng} r \cdot \operatorname{tng} r' + (\cos 2e - \operatorname{tng} p \sin 2a)(\operatorname{tng} r + \operatorname{tng} r')$$
$$= k^2 \sin 2a - \operatorname{tng} p^2 \sin 2a + 2 \cos 2e \cdot \operatorname{tng} p.$$

Nun ist aber: cos 2e — tng p sin 2a = cos 2a, und das Glied auf der rechten Seite ist gehörig reduzirt = sin 2a; daher hat man die einfache Gleichung:

$$\text{tng } r . \text{tng } r' + \cot 2a \, (\text{tng } r + \text{tng } r') = 1,$$

oder: $$\text{tng } 2a = \frac{\text{tng } r + \text{tng } r'}{1 - \text{tng } r . \text{tng } r'},$$

d. h.: $$r + r' = 2a.$$

Es ist also die Summe der beiden nach einem Punkte M gezogenen Leitstrahlen gleich der großen Axe AB, wie bei der ebenen Ellipse.

Beschreibt man daher aus dem Centrum f einen kleinen Kreis mit einem Radius, welcher der großen Axe AB = 2a gleich ist, so ist der kürzeste Abstand eines jeden Punktes M der Curve von der Peripherie dieses Kreises gleich seinem Abstande von dem anderen Brennpunkte F.

§. 75.

Zu demselben Resultate führt auch die Betrachtung der excentrischen Anomalie. Beschreibt man nämlich über der großen Axe AB (Fig. 15) einen Kreis ANB, dessen sphärischer Radius also CA = CB = a ist, und wird die Applicate PM der Ellipse verlängert, bis sie eine Applicate PN des Kreises wird, so heißt der Winkel BCN = E oder auch der ihn messende Bogen BN die excentrische Anomalie des Punktes M, wenn der Winkel BfM seine wahre Anomalie ist.

Was zunächst die Vergleichung der Applicaten PM und PN betrifft, so ist: $\text{tng } PM^2 = \frac{\text{tng } b^2}{\sin a^2} (\sin a^2 - \sin x^2)$ und $\text{tng } PN^2 = \frac{\text{tng } a^2}{\sin a^2} (\sin a^2 - \sin x^2)$, und also:

$$\frac{\text{tng } PM}{\text{tng } PN} = \frac{\text{tng } b}{\text{tng } a}.$$

Da weiter: fP = e — CP, also: $\text{tng } fP = \frac{\text{tng } e - \text{tng } CP}{1 + \text{tng } e . \text{tng } CP}$, und weil $\text{tng } CP = \text{tng } CN . \cos E$ ist, auch $\text{tng } fP = \frac{\text{tng } e - \text{tng } a \cos E}{1 + \text{tng } a \text{ tng } e . \cos E}$ ist, so erhält man (fM = r gesetzt) wenn dieser Ausdruck in der Formel

$$\text{tng } r = \text{tng } p + \frac{\sin 2e}{\sin 2a} \text{tng } Pf$$

substituirt wird, nach gehöriger Reduction:

$$\operatorname{tng} r = \frac{\operatorname{tng} a - \operatorname{tng} e \,.\, \cos E}{1 + \operatorname{tng} a \,.\, \operatorname{tng} e \,.\, \cos E};$$

wodurch der Leitstrahl r als eine Function der excentrischen Anomalie dargestellt wird.

Wird nun von f das Loth fg auf CN gefällt, so ist:

$\operatorname{tng} Cg = \operatorname{tng} e \cos E$, und also: $\operatorname{tng} r = \frac{\operatorname{tng} CN - \operatorname{tng} Cg}{1 + \operatorname{tng} CN \,.\, \operatorname{tng} Cg}$,

oder einfacher:

$$fM = CN - Cg = Ng.$$

Wird vom anderen Brennpunkte F das Loth FG auch auf CN gefällt, so ist auf dieselbe Weise:

$$FM = CN + CG = NG,$$

und da $Cg = CG$ ist, so hat man offenbar:

$$fM + FM = 2CN = AB.$$

Um endlich den Zusammenhang zwischen der wahren Anomalie und der excentrischen selbst durch eine Formel auszudrücken, formen wir die beiden Ausdrücke für cot r vorläufig um in:

$$\cot r = \frac{\sin a \cos a + \sin e \cos e \cos v}{\sin a^2 - \sin e^2} \text{ und}$$

$$\cot r = \frac{\cos a \cos e + \sin a \sin e \cos E}{\sin a \cos e - \cos a \sin e \cos E},$$

um sie zu identifiziren.

Die erhaltene Gleichung zieht sich nach allen Reductionen zusammen auf:

$(\operatorname{tng}. a - \operatorname{tng} e \,.\, \cos E) \,.\, (\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} e \,.\, \cos v) = \operatorname{tng} a^2 - \operatorname{tng} e^2$,

und durch fernere Umformung erhält man:

$$\sin \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{\sin (a+e)}{\sin a \cos e - \cos a \sin e \cos E} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} E^2$$

$$= \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} e}{\operatorname{tng} a - \operatorname{tng} e \cos E} \sin \tfrac{1}{2} E^2,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{\sin (a-e)}{\sin a \cos e - \cos a \sin e \cos E} \,.\, \cos \tfrac{1}{2} E^2$$

$$= \frac{\operatorname{tng} a - \operatorname{tng} e}{\operatorname{tng} a - \operatorname{tng} e \cos E} \cos \tfrac{1}{2} E^2,$$

oder: $\operatorname{tng} \frac{v}{2} = \operatorname{tng} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{\sin (a+e)}{\sin (a-e)}} = \operatorname{tng} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} e}{\operatorname{tng} a - \operatorname{tng} e}}$.

Auch ist noch:

$$\sin v = \frac{\sqrt{(\operatorname{tng} a^2 - \operatorname{tng} e^2)}}{\operatorname{tng} a - \operatorname{tng} e \cos E} \sin E = \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} e \cos v}{\sqrt{(\operatorname{tng} a^2 - \operatorname{tng} e^2)}} \sin E.$$

Differenziirt man, so findet sich: $\frac{\partial v}{\sin v} = \frac{\partial E}{\sin E}$, und also offenbar:

$$\partial v = \frac{\sqrt{(\operatorname{tng} a^2 - \operatorname{tng} e^2)}}{\operatorname{tng} a - \operatorname{tng} e \cos E} \partial E.$$

§. 76.

Wenn Fig. 16 aus dem inneren Mittelpunkte C eines Kegelschnitts ADBE ein Hauptkreis QSRT beschrieben wird, wovon die beiden Axen AB und DE des Kegelschnitts in Q, S, R, T geschnitten werden, so sind diese vier Punkte die äußeren Mittelpunkte. Wir können aber etwa R und T übergehen, weil sie die Gegenpunkte von Q und S sind, und demgemäß nur noch Q und S als die beiden äußeren Mittelpunkte aufführen.

Sind nun $AP = x$ und $PM = z$ die Abscisse und Applicate eines Punktes M des Kegelschnitts, so ist nach §. 72:

$$\operatorname{tng} z^2 = \operatorname{tng} p \,.\, \sin 2x - \frac{2 \operatorname{tng} p}{\operatorname{tng} 2a} \sin x^2.$$

Wird nun $a + a' = 90°$, also $2a + 2a' = 180°$ gesetzt, so ist offenbar: $QA = a'$, und die Gleichung verwandelt sich dadurch in:

$$\operatorname{tng} z^2 = \operatorname{tng} p \,.\, \sin 2x + \frac{2 \operatorname{tng} p}{\operatorname{tng} 2a'} \sin x^2,$$

welche gleichbedeutend ist mit $\operatorname{tng} z^2 = \frac{2 \operatorname{tng} p}{\sin 2a} \sin PA \,.\, \sin PB$. Verlegen wir jetzt den Anfangspunkt in den äußeren Mittelpunkt Q selbst, indem wir $QP = x$ und $PM = z$ setzen, so ist: $PA = x - a'$ und $PB = QB - QP = a' + 2a - x = 180° - a' - x$. Daher ist: $\operatorname{tng} z^2 = \frac{2 \operatorname{tng} p}{\sin 2a'} \sin (x - a') \sin (x + a')$. Für $x = o$ erhält man also:

$$\operatorname{tng} z^2 = - \operatorname{tng} p \,.\, \operatorname{tng} a'.$$

Daher ist nun z unmöglich; setzen wir aber das positive Product $\operatorname{tng} p \,.\, \operatorname{tng} a' = \operatorname{tng} b'^2$, so nennen wir nun b' die zweite Halbaxe für den äußeren Mittelpunkt Q, und es ist dann rückwärts:

$$\operatorname{tng} p = \frac{\operatorname{tng} b'^2}{\operatorname{tng} a'},$$

welche Formel mit der im §. 71 gefundenen Formel $\operatorname{tng} p = \frac{\operatorname{tng} b^2}{\operatorname{tng} a}$ Aehnlichkeit hat. Wird die Größe b' eingeführt, so verwandelt sich die Gleichung an die Curve in:

$$\operatorname{tng} z^2 = \frac{\operatorname{tng} b'^2}{\sin a'^2} (\sin x^2 - \sin a'^2).$$

So lange also $x < a'$ ist, ist offenbar z unmöglich; aber zu jeder größeren positiven oder auch negativen Abscisse x gehören zwei gleich große und entgegengesetzte Applicaten. Wird $x = \pm 90°$ genommen, so erhält man die den Punkten C und K zugehörigen Applicaten $CD = CE$ und $KH = KG$, deren jede $= b$ ist. Wird x nicht $> \pm 90°$ genommen, so ergänzen sich die beiden Linien EAD und GB'H, welche als getrennte Zweige anzusehen sind, zu der durch die vorstehende Gleichung ausgedrückten Curve, gleichsam wie die beiden Zweige der ebenen Hyperbel, mit deren Gleichung auch die vorstehende Aehnlichkeit hat. Die beiden Halbaxen b und b' stehen in einem bemerkenswerthen Zusammenhange; es ist nämlich:

$$\text{tng } p = \text{tng } b \,.\, \text{tng } b'.$$

Auch hat man noch die beiden Formeln:

$$\text{tng } b' = \frac{\text{tng } b}{\text{tng } a} \text{ und umgekehrt } \text{tng } b = \frac{\text{tng } b'}{\text{tng } a'}.$$

Auf ähnliche Art, wie dem Zweige EAD in Hinsicht auf den Mittelpunkt Q zugeordnet ist der Zweig GB'H, ist auch in Hinsicht auf den Gegenpunkt R von Q dem Zweige EBD zugeordnet der Zweig G'A'H', welcher mit dem Zweige GB'H eine geschlossene Linie ausmacht, weil $KQ = QC = CR = RK' = 90°$, also die ganze Linie $KK' = 360°$ ist. Daher ist der Punkt K' mit K derselbe; eben so H' mit H und G' mit G.

Die aus GB'H und G'AH' zusammengesetzte geschlossene Linie ist offenbar die Gegencurve von EADB.

§. 77.

Werden von dem Mittelpunkte Q aus Tangenten an die Curve gelegt, so ist jede $= 90°$ oder die Scheitel von ED werden die Berührungspunkte; auch ist offenbar der Winkel: $CQD = CQE = b$.

Diese Tangenten haben Aehnlichkeit mit den Asymptoten der Hyperbel. Sie helfen zur Construction der zweiten Axe b'.

Errichtet man nämlich im Scheitel A der großen Axe auf ihr ein Loth $A\alpha$, wovon die eine Asymptote QD in α geschnitten wird, und wird $C\alpha$ gezogen bis zum Einschnitte L in den Hauptkreis QSRT, so ist: $QL = b'$.

Denn es ist im rechtwinkeligen Dreiecke $QA\alpha$:
$\text{tng } A\alpha = \text{tng } AQ\alpha \,.\, \sin QA$, oder: $\text{tng } A\alpha = \text{tng } b \,.\, \sin a'$; auch ist: $\text{tng } A\alpha = \text{tng } QL \cos QA = \text{tng } QL \,.\, \cos a'$, und also:

$$\text{tng } QL = \text{tng } b \,.\, \text{tng } a' = \frac{\text{tng } b}{\text{tng } a} = \text{tng } b' \text{ oder } QL = b'.$$

Nimmt man ferner Q zum Anfangspunkte und die Berührungs-

punkte E, D zu Cardinalpunkten, so ist der Winkel dieser Coordinaten-Axen gleich der Cardinalen ED = 2b. Sind ferner QX = arc (tng = x) und QY = arc (tng = y) die Axen-Coordinaten eines Punktes N der Curve, so hat man, wenn das Loth Nn auf ED gefällt wird, welches durch Q geht:

$$\frac{\sin Dn}{\sin DE} = \frac{\sin nN}{\sin QN} : \frac{\sin EX}{\sin QX}, \text{ oder: } \frac{\sin Dn}{\sin DE} = \text{tng } Nn \,.\, \text{tng } QX,$$

d. h.: $\sin Dn = \text{tng } Nn \,.\, \sin 2b \,.\, x$.

Eben so ist noch: $\sin En = \text{tng } Nn \,.\, \sin 2b \,.\, y$.

Die Multiplication der beiden Gleichungen gibt:

$$\sin Dn \,.\, \sin En = \text{tng } Nn^2 \,.\, \sin 2b^2 \,.\, x \,.\, y,$$

und weil $\text{tng } Nn^2 = \frac{\text{tng } a^2}{\sin b^2} \,.\, \sin Dn \,.\, \sin En$ nach §. 70 ist, so erhält man offenbar die einfache Gleichung:

$$x \,.\, y = \frac{\sin b^2}{(\sin 2b)^2 \text{ tng } a^2} = \frac{\cot a^2}{4 \cos b^2}.$$

Um die Halbaxen des äußeren Mittelpunktes noch einzuführen, machen wir Gebrauch von der im §. 76 erhaltenen Gleichung: $\text{tng} b = \frac{\text{tng } b'}{\text{tng } a'}$, woraus folgt:

$$\frac{1}{\cos b^2} = \frac{\text{tng } a'^2 + \text{tng } b'^2}{\text{tng } a'^2} = \frac{\text{tng } a'^2 + \text{tng } b'^2}{\cot a^2}.$$

Daher ist denn endlich

$$x \,.\, y = \frac{\text{tng } a'^2 + \text{tng } b'^2}{4}$$

die Asymptotengleichung der sphärischen Hyperbel.

§. 78.

Wird der Hauptkreis KK' zur ersten und QSRT zur zweiten Coordinaten-Axe genommen, und will man sich der Axen-Coordinaten bedienen, so findet man aus der Gleichung

$$\text{tng } z^2 = \frac{\text{tng } b'^2}{\sin a'^2} (\sin x^2 - \sin a'^2)$$

leicht die folgende Gleichung: $x^2 \,.\, \cot a'^2 - y^2 \,.\, \cot b'^2 = 1$, indem man nur $y \,.\, \cos x$ für tng z substituirt und dann x für tng x schreibt.

Zieht man vom Mittelpunkte Q aus ferner nach einem Punkte M der Curve den Leitstrahl QM = ϱ, welcher mit der ersten Axe den Winkel MQA = v und mit der zweiten also den Winkel 90° — v einschließt, so ist: $x = \text{tng } \varrho \cos v$ und $y = \text{tng } r \,.\, \sin v$; daher hat man zwischen ϱ und v die Gleichung:

$$\cot \varrho^2 = \cot a'^2 \,.\, \cos v^2 - \cot b'^2 \,.\, \sin v^2;$$

woraus man also sieht, daß zu jedem Werthe von v zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von ϱ gehören. Daher ist jede durch Q gezogene Sehne, wodurch der Zweig EAD mit dem zugeordneten Zweige GB'H verbunden wird, vom Punkte Q halbirt, oder ein Durchmesser, wie ohnehin bekannt ist.

Wird der Abstand Qf' = QF genommen, so sind f' und F die Brennpunkte der Hyperbel. Weil aber ff' = 180° und also f' der Gegenpunkt von F ist, so können die Eigenschaften dieser Brennpunkte auf der Stelle aus den Eigenschaften der Brennpunkte f und F hergeleitet werden, da jeder von f aus gezogene Hauptkreis durch f' geht.

Zieht man, z. B., von f' und F' nach dem Punkte M der Curve die Leitstrahlen f'M und F'M, so geht die Verlängerung Mf von f'M durch f, und es ist:

$$f'M + Mf = 180° = AB + AB'$$

$$\text{und } FM + fM = AB \text{ (nach §. 74);}$$

$$\text{also ist: } f'M - FM = AB';$$

und es ist also der Unterschied der Leitstrahlen der Hyperbel gleich der Axe AB', wie bei der ebenen Hyperbel.

Schließlich dient die allgemeine Bemerkung, daß in Beziehung auf den anderen äußeren Mittelpunkt S (und seinen Gegenpunkt T) dasselbe gilt, was nun in Hinsicht auf Q bewiesen ist. Es ist nämlich in Hinsicht auf den Mittelpunkt S dem Zweige ADB zugeordnet der congruente JE'U, welcher mit J'D'U' wieder ebenfalls eine geschlossene Curve, nämlich die Gegencurve von ADBE ausmacht. Nur die Ausnahme findet Statt, daß es nun in der Axe CO keine Brennpunkte gibt. Im Uebrigen erscheint nun auch die aus den beiden getrennten Zweigen ADB und JE'U bestehende Curve als eine Hyperbel; die Scheitel sind die Endpunkte D und E' der ersten Axe, welche = 180° — DE ist; die zweite Halbaxe ist nun 90° — b' = SL.

Werden in A und B Tangenten an ADB gelegt, so schneiden sie sich in S und gehen verlängert als Tangenten des Zweiges JE'U durch J und U, und sind also Asymptoten, oder die äußersten Tangenten. Der Parameter aber ist der im §. 71 mit q bezeichnete.

Bezeichnet man SD = SE' = α und SL = β, so findet man:

$\text{tng } q = \frac{\text{tng } \beta^2}{\text{tng } \alpha}$, und also: $\text{tng } q = \text{tng } \alpha . \text{tng } \beta$.

Zusatz. Vergleicht man die Gleichungen $\text{tng } z^2 = \text{tng } p . \sin 2x - \frac{2 \text{tng } p}{\text{tng } 2a} \sin x^2$ und $\text{tng } z^2 = \text{tng } p . \sin 2x + \frac{2 \text{ tng } p}{\text{tng } 2a'} \sin x^2$ aus §. 76, so fällt in die Mitte der Fall, daß 2a = 2a' und also a = a' = 90° ist. Die Gleichung hat dann die ein-

fache Form: $\operatorname{tng} z^2 = \operatorname{tng} p . \sin 2x$, und hat nun Aehnlichkeit mit der bekannten Gleichung an die ebene Parabel.

§. 79.

Die Natur der sphärischen Kegelschnitte kann auch ausgedrückt werden durch eine Gleichung, welche der im §. 77 erhaltenen Asymptotengleichung ähnlich, aber ungleich allgemeiner ist.

Ist nämlich in Fig. 17 die Sehne AB die Polare des Poles V, so sind VA und VB zwei Berührungslinien, und jede von V aus gezogene Linie VMPN wird von der Polaren AB in P harmonisch getheilt. Eine unter diesen Linien VDCE werde als der Lage nach constant angesehen, und es sey:

$$\frac{\sin CD}{\sin VD} = \frac{\sin CE}{\sin VE} = \beta,$$

$$\sin CA . \sin CB = \alpha^2.$$

Dann ist nach §. 66:

$$\frac{\sin pM^2}{\sin VM^2} = \frac{\sin pN^2}{\sin VN^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin pA . \sin pB.$$

Werden nun weiter die Linien BM und AM gezogen, wovon die Tangenten VA und VB in P und Q geschnitten werden, so ist:

$$\frac{\sin Bp}{\sin BA} = \frac{\sin pM}{\sin VM} : \frac{\sin PA}{\sin VP},$$

$$\frac{\sin Ap}{\sin AB} = \frac{\sin pM}{\sin VM} : \frac{\sin BQ}{\sin VQ};$$

und also: $$\frac{\sin pM^2}{\sin VM^2} = \frac{\sin Bp}{\sin BA} . \frac{\sin Ap}{\sin BA} . \frac{\sin PA}{\sin VP} . \frac{\sin BQ}{\sin VQ}.$$

Wird diese Proportion mit der vorigen verbunden, so erhält man

$$\frac{\sin AP}{\sin VP} . \frac{\sin BQ}{\sin VQ} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} . \sin AB^2$$

zur gesuchten allgemeinen Gleichung. Ist V also ein äußerer Mittelpunkt, so ist AB die Cardinale der Coordinaten-Axen VA und VB; ferner ist dann: $\beta = \operatorname{tng} CD$; $\alpha^2 = \sin CA^2 = \sin CB^2$, und also: $\frac{\sin AB^2}{\alpha^2} = 4 \cos CA^2 = 4 \cos CB^2$; denn nun ist C die Mitte von AB, und man erhält also:

$$\operatorname{tng} AP . \operatorname{tng} BQ = 4 \operatorname{tng} CD^2 . \cos CB^2,$$

oder: $$\operatorname{tng} VP . \operatorname{tng} VQ = \frac{1}{4 \operatorname{tng} CD^2 . \cos CB^2}$$ (wie im §. 77).

Aber wenn auch nur AB und ED zwei conjugirte andere Durchmesser sind, so gilt dennoch die Gleichung:

woraus man also sieht, daß zu jedem Werthe von v zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von ϱ gehören. Daher ist jede durch Q gezogene Sehne, wodurch der Zweig EAD mit dem zugeordneten Zweige GB'H verbunden wird, vom Punkte Q halbirt, oder ein Durchmesser, wie ohnehin bekannt ist.

Wird der Abstand Qf' = QF genommen, so sind f' und F die Brennpunkte der Hyperbel. Weil aber ff' = 180° und also f' der Gegenpunkt von F ist, so können die Eigenschaften dieser Brennpunkte auf der Stelle aus den Eigenschaften der Brennpunkte f und F hergeleitet werden, da jeder von f aus gezogene Hauptkreis durch f' geht.

Zieht man, z. B., von f' und F' nach dem Punkte M der Curve die Leitstrahlen f'M und F'M, so geht die Verlängerung Mf von f'M durch f, und es ist:

$$f'M + Mf = 180° = AB + AB'$$

$$\text{und } FM + fM = AB \text{ (nach §. 74);}$$

$$\text{also ist: } f'M - FM = AB';$$

und es ist also der Unterschied der Leitstrahlen der Hyperbel gleich der Axe AB', wie bei der ebenen Hyperbel.

Schließlich dient die allgemeine Bemerkung, daß in Beziehung auf den anderen äußeren Mittelpunkt S (und seinen Gegenpunkt T) dasselbe gilt, was nun in Hinsicht auf Q bewiesen ist. Es ist nämlich in Hinsicht auf den Mittelpunkt S dem Zweige ADB zugeordnet der congruente JE'U, welcher mit J'D'U' wieder ebenfalls eine geschlossene Curve, nämlich die Gegencurve von ADBE ausmacht. Nur die Ausnahme findet Statt, daß es nun in der Axe CO keine Brennpunkte gibt. Im Uebrigen erscheint nun auch die aus den beiden getrennten Zweigen ADB und JE'U bestehende Curve als eine Hyperbel; die Scheitel sind die Endpunkte D und E' der ersten Axe, welche = 180° — DE ist; die zweite Halbaxe ist nun 90° — b' = SL.

Werden in A und B Tangenten an ADB gelegt, so schneiden sie sich in S und gehen verlängert als Tangenten des Zweiges JE'U durch J und U, und sind also Asymptoten, oder die äußersten Tangenten. Der Parameter aber ist der im §. 71 mit q bezeichnete.

Bezeichnet man SD = SE' = α und SL = β, so findet man:

$$\text{tng } q = \frac{\text{tng } \beta^2}{\text{tng } \alpha}, \text{ und also: tng } q = \text{tng } a . \text{tng } \beta.$$

Zusatz. Vergleicht man die Gleichungen $\text{tng } z^2 = \text{tng } p . \sin 2x - \frac{2 \text{tng } p}{\text{tng } 2a} \sin x^2$ und $\text{tng } z^2 = \text{tng } p . \sin 2x + \frac{2 \text{ tng } p}{\text{tng } 2a'} \sin x^2$ aus §. 76, so fällt in die Mitte der Fall, daß 2a = 2a' und also a = a' = 90° ist. Die Gleichung hat dann die ein-

fache Form: $\text{tng}\ z^2 = \text{tng}\ p \,.\, \sin 2x$, und hat nun Aehnlichkeit mit der bekannten Gleichung an die ebene Parabel.

§. 79.

Die Natur der sphärischen Kegelschnitte kann auch ausgedrückt werden durch eine Gleichung, welche der im §. 77 erhaltenen Asymptotengleichung ähnlich, aber ungleich allgemeiner ist.

Ist nämlich in Fig. 17 die Sehne AB die Polare des Poles V, so sind VA und VB zwei Berührungslinien, und jede von V aus gezogene Linie VMPN wird von der Polaren AB in P harmonisch getheilt. Eine unter diesen Linien VDCE werde als der Lage nach constant angesehen, und es sey:

$$\frac{\sin CD}{\sin VD} = \frac{\sin CE}{\sin VE} = \beta,$$

$$\sin CA \,.\, \sin CB = \alpha^2.$$

Dann ist nach §. 66:

$$\frac{\sin pM^2}{\sin VM^2} = \frac{\sin pN^2}{\sin VN^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin pA \,.\, \sin pB.$$

Werden nun weiter die Linien BM und AM gezogen, wovon die Tangenten VA und VB in P und Q geschnitten werden, so ist:

$$\frac{\sin Bp}{\sin BA} = \frac{\sin pM}{\sin VM} : \frac{\sin PA}{\sin VP},$$

$$\frac{\sin Ap}{\sin AB} = \frac{\sin pM}{\sin VM} : \frac{\sin BQ}{\sin VQ};$$

und also: $$\frac{\sin pM^2}{\sin VM^2} = \frac{\sin Bp}{\sin BA} \,.\, \frac{\sin Ap}{\sin BA} \,.\, \frac{\sin PA}{\sin VP} \,.\, \frac{\sin BQ}{\sin VQ}.$$

Wird diese Proportion mit der vorigen verbunden, so erhält man

$$\frac{\sin AP}{\sin VP} \,.\, \frac{\sin BQ}{\sin VQ} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \,.\, \sin AB^2$$

zur gesuchten allgemeinen Gleichung. Ist V also ein äußerer Mittelpunkt, so ist AB die Cardinale der Coordinaten-Axen VA und VB; ferner ist dann: $\beta = \text{tng}\ CD$; $\alpha^2 = \sin CA^2 = \sin CB^2$, und also: $\frac{\sin AB^2}{\alpha^2} = 4 \cos CA^2 = 4 \cos CB^2$; denn nun ist C die Mitte von AB, und man erhält also:

$$\text{tng}\ AP \,.\, \text{tng}\ BQ = 4\, \text{tng}\ CD^2 \,.\, \cos CB^2,$$

oder: $$\text{tng}\ VP \,.\, \text{tng}\ VQ = \frac{1}{4\, \text{tng}\ CD^2 \,.\, \cos CB^2}$$ (wie im §. 77).

Aber wenn auch nur AB und ED zwei conjugirte andere Durchmesser sind, so gilt dennoch die Gleichung:

$$\frac{\sin AP}{\sin VP}\cdot\frac{\sin BQ}{\sin VQ}=4\,.\,\mathrm{tng}\ CD^2\,.\cos CA^2.$$

Außerdem ist nun: $VA+VB=180°$, aber nicht: $VA=VB=90°$.

§. 80.

Legt man ferner durch M und N die Tangenten RMS und R′NS′, wovon die vorigen Tangenten in R, R′, S, S′ geschnitten werden, so schneiden sich diese selbst auf der Polaren AB des Punktes V in einem Punkte W so, daß W wieder der Pol von MN ist. Daher hat man noch die folgenden harmonisch getheilten Linien: WR′NS′, WAPB, WRMS, WPnQ, VPRA und VQSB. In so fern nun aber die beiden letzten Linien harmonisch getheilt sind, ist:

$$\sin VR\,.\sin AP=2\,.\sin AR\,.\sin VP,$$

$$\sin VS\,.\sin BQ=2\,.\sin BS\,.\sin VQ,$$

oder: $\frac{\sin AP}{\sin VP}=2.\frac{\sin AR}{\sin VR}$ und $\frac{\sin BQ}{\sin VQ}=2.\frac{\sin BS}{\sin VS}$.

Werden diese Verhältnisse in der Gleichung

$$\frac{\sin AP}{\sin VP}\cdot\frac{\sin BQ}{\sin VQ}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin AB^2$$

substituirt, so erhält man: $\frac{\sin AR}{\sin VR}\cdot\frac{\sin BS}{\sin VS}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\sin AB^2}{4}$.

Nimmt man an, daß C die Mitte von AB sey, so erhält man also noch:

$$\frac{\sin AR}{\sin VR}\cdot\frac{\sin BS}{\sin VS}=\beta^2.\cos CA^2=\beta^2\cos CB^2;$$

und durch diese Gleichung wird auf die allgemeinste Weise das Gesetz ausgedrückt, nach welchem zwei Tangenten eines Kegelschnitts von einer dritten geschnitten werden.

Die Constante β ist wie vorhin: $\beta=\frac{\sin CD}{\sin VD}=\frac{\sin CE}{\sin VE}$.

Sind AB und ED zwei conjugirte Durchmesser, so ist: $VC=90°$, und also: $\beta=\mathrm{tng}\ CD$; sind endlich noch AB und CD zwei Axen des Kegelschnitts, so ist: $VA=VB$, und also nun:

$$\mathrm{tng}\ AR\,.\,\mathrm{tng}\ BS=\mathrm{tng}\ CD^2\,.\cos CB^2.$$

Außerdem ist noch in diesem speciellen Falle: $\mathrm{tng}\ AP=2\mathrm{tng}\ AR$ und $\mathrm{tng}\ BQ=2\mathrm{tng}\ BS$.

Was endlich so eben von der sphärischen Ellipse bewiesen ist, gilt offenbar auch von der sphärischen Hyperbel.

§. 81.

Wenn in Fig. 18 in Beziehung auf den inneren Mittelpunkt C Aa und Bb zwei conjugirte Durchmesser sind und gesetzt wird:

$\operatorname{tng}\frac{Aa}{2}=A$ und $\operatorname{tng}\frac{Bb}{2}=B$, so ist, wenn sie zu Coordinaten-Axen genommen werden, die Gleichung an die Curve:

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1.$$

Zu jedem Werthe von x gehören nun zwei gleich große und entgegengesetzte Werthe von y, und umgekehrt.

Ist also XY die Cardinale des Coordinaten-Systems, so ist: $\operatorname{tng}CP=+x$ und $\operatorname{tng}Cp=-x$; $\operatorname{tng}CQ=+y$ und $Cq=-y$. Die vier Punkte M, N, m, n der Curve, welche hierdurch bestimmt werden, sind die vier Ecken eines in dieselbe geschriebenen Vierecks von besonderer Beschaffenheit, dessen Seiten von den beiden conjugirten Durchmessern in P, Q, p, q nach einem Gesetze geschnitten werden, welches nur nicht ganz so einfach ist, als in dem analogen Falle der Planimetrie, wo das Viereck ein Parallelogramm ist, und seine Seiten von den beiden conjugirten Durchmessern halbirt werden.

Es ist nämlich nach §. 3, wenn $CP=x$ und $CQ=y$ gesetzt wird:

$$\cot PM=\left(\frac{\cot y}{\cos x}+\cos v\,.\,\sin x\right):\sqrt{(1-\cos v^2.\sin x^2)},$$

$$\cot PN=\left(\frac{-\cot y}{\cos x}+\cos v\,.\,\sin x\right):\sqrt{(1-\cos v^2.\sin x^2)},$$

$$\cot pm=\left(\frac{\cot y}{\cos x}-\cos v\,.\,\sin x\right):\sqrt{(1-\cos v^2.\sin x^2)},$$

$$\cot pn=\left(\frac{-\cot y}{\cos x}-\cos v\,.\,\sin x\right):\sqrt{(1-\cos v^2.\sin x^2)}.$$

Daher hat man denn offenbar: $PM=pn$ und $PN=pm$. Ganz eben so findet man:

$$QM=qn \text{ und } Qm=qN.$$

Weil nun aber $YP+Yp=180°$ ist, so ist also auch: $YM+Yn=YN+Ym=180°$; und eben so findet man: $XM+Xn=Xm+XN=180°$.

Der Uebergang von zwei conjugirten Durchmessern zu zwei anderen ist eben so einfach, als in der Planimetrie, weil dabei der Anfangspunkt der Coordinaten nicht verlegt wird, und also die vorzunehmende Coordinatenverwandlung mit den im §. 18 hergeleiteten Formeln bestritten werden kann. Man gelangt zu eben so einfachen Formeln, als in der Planimetrie.

Sind nämlich A′a′ und B′b′ zwei andere conjugirte Durchmesser und setzt man: $\operatorname{tng}\frac{A'a'}{2}=A'$; $\operatorname{tng}\frac{B'b'}{2}=B'$; bezeichnet man

ferner den Winkel ACA′ mit (A, A′); den Winkel BCB′ mit (B, B′); den Winkel ACB mit (A, B); den Winkel A′CB′ mit (A′, B′); den Winkel A′CB mit (A′, B); den Winkel ACB′ mit (A, B′), so ist:

1) $A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2$,

2) $A . B . \sin (A,B) = A' . B' . \sin (A', B')$,

3) $A . B' . \sin (A, B') = A' . B . \sin (A', B)$,

4) $A . A' . \sin (A, A') = B . B' \sin (B, B')$.

Dieselben Formeln gelten auch von den conjugirten Durchmessern, welche einem Kegelschnitte in Hinsicht auf den einen oder den anderen von seinen beiden äußeren Mittelpunkten zukommen, und nur die erste unter ihnen erhält dabei eine geringe Abänderung, sie ist dann:

$$A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2 \text{ oder } B^2 - A^2 = B'^2 - A'^2.$$

§. 82.

Die Gleichung an die durch den Punkt M gehende Berührungslinie ED, wovon die beiden conjugirten Durchmesser Aa und Bb in D und E geschnitten werden, ist:

$$\frac{x.t}{A^2} + \frac{y.u}{B^2} = 1,$$

und es folgt daraus: $\text{tng } CA^2 = A^2 = \text{tng } CP.\text{tng } CD = x.\text{tng } CD$;

$$\text{tng } CB^2 = B^2 = \text{tng } CQ.\text{tng } CE = y.\text{tng } CE.$$

Wird nun vom Mittelpunkte C das Loth CR auf die Tangente DE gefällt, und werden die beiden conjugirten Halbmesser darauf projizirt durch die Perpendikel BS und AT, so ist:

$$\frac{x}{A} = \frac{A}{\text{tng } CD} = \frac{\text{tng } CT}{\text{tng } CR},$$

$$\frac{y}{B} = \frac{B}{\text{tng } CE} = \frac{\text{tng } CS}{\text{tng } CR};$$

und weil $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$ ist, so erhält man

$$\text{tng } CT^2 + \text{tng } CS^2 = \text{tng } CR^2$$

zum Ausdrucke einer allgemeinen Eigenschaft der conjugirten Durchmesser eines sphärischen Kegelschnitts, welche um so bemerkenswerther ist, als die Tangente DE die Curve in einem beliebigen Punkte M berühren kann.

Aus der Gleichung $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ leiten wir noch einen allgemeinen Ausdruck für die Größe des Krümmungshalbmessers r her, welcher dem Punkte M oder (x, y) der Curve angehört. Es sey der Winkel der beiden conjugirten Durchmesser = v und

$x = A . \sin\varphi$, dann ist: $y = B . \cos\varphi$, $y\partial x - x\partial y = A . B . \partial\varphi$, $-(\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x) = A . B . \partial\varphi^3$.
Daher ist denn nach §. 30: $\operatorname{tng} r =$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{A^2\cos\varphi^2 + 2AB\sin\varphi\cos\varphi\cos v + B^2\sin\varphi^2 + A^2B^2\sin v^2}{1 + A^2\sin\varphi^2 + B^2\cos\varphi^2 + 2AB\sin\varphi\cos\varphi\cos v}\right)^3}}{A . B . \sin v}.$$

Hieraus findet man nun die Ausdrücke für die Krümmungshalbmesser der Scheitel A und B der beiden conjugirten Durchmesser Aa und Bb, welche mit α und β bezeichnet seyn mögen, indem man zuerst $\varphi = 90°$ und dann $\varphi = o$ setzt, wodurch man erhält:

$$\operatorname{tng}\alpha = \frac{B^2}{A\sin v} . \sqrt{\left(\frac{1 + A^2 . \sin v^2}{1 + A^2}\right)^3},$$

$$\operatorname{tng}\beta = \frac{A^2}{B\sin v} . \sqrt{\left(\frac{1 + B^2 . \sin v^2}{1 + B^2}\right)^3}.$$

§. 83.

Um die Gleichung an die Evolute eines sphärischen Kegelschnitts zu finden, ist es am bequemsten, auf den Gebrauch der im §. 26 aufgestellten allgemeinen Ausdrücke für a und b zu verzichten, und schon von der Gleichung

$$t[1 + y^2 - pxy] + u[p + px^2 - xy] = x + py$$

an die Normale des Punktes M oder (x, y) des Kegelschnitts auszugehen. Es seyen a und b die beiden Halbaxen des Kegelschnitts und $\operatorname{tng} a = A$, $\operatorname{tng} b = B$; so ist die Gleichung an den Kegelschnitt:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Setzen wir nun: $x = A\cos\varphi$, so ist: $y = B\sin\varphi$, und also: $p = -\frac{B}{A} . \cot\varphi$; daher ist nach der Substitution und Reduction die Gleichung an die Normale:

$$t(A + AB^2)\sin\varphi - u(B + BA^2)\cos\varphi = (A^2 - B^2) . \sin\varphi\cos\varphi.$$

Wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{1}{m} = \frac{A + AB^2}{A^2 - B^2}; \quad \frac{1}{n} = \frac{B + BA^2}{A^2 - B^2},$$

so ist die Gleichung: $\frac{t}{m}\sin\varphi - \frac{u}{n}\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$.

Diese Gleichung muß (wie im §. 26) noch einmal differenzirt werden, indem man t und u dabei als constant ansieht. Hierdurch findet man:

$$\frac{t}{m}\cos\varphi + \frac{u}{n}\sin\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2.$$

Wird die erste Gleichung mit sin φ und die zweite mit cos φ multiplizirt, so erhält man durch Addition:

$$\frac{t}{m} = \cos \varphi^3.$$

Wird die erste Gleichung mit cos φ und die zweite mit sin φ multiplizirt, so erhält man durch Subtraction:

$$\frac{u}{n} = -\sin \varphi^3.$$

Daher ist die gesuchte Gleichung an die Evolute des Kegelschnitts:

$$\left(\frac{t}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Man findet aber nach einiger Reduction:

$$m = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\sin 2a} \text{ und } n = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\sin 2b}.$$

Daher ist, wenn diese Werthe substituirt werden, die Gleichung an die Evolute des Kegelschnitts:

$$(x \cdot \sin 2a)^{\frac{2}{3}} + (y \cdot \sin 2b)^{\frac{2}{3}} = (\cos 2b - \cos 2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Erhebt man die Gleichung $\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ zum Cubus, so läßt sie sich unter folgende Form bringen:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{xy}{mn}\right)^{\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = 1,$$

$$\text{oder: } \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{xy}{mn}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Hieraus sieht man, daß die Evolute eines sphärischen Kegelschnitts eine Linie der sechsten Ordnung ist; denn durch wiederholtes Cubiren findet man:

$$27 \cdot \frac{x^2 \cdot y^2}{m^2 \cdot n^2} = \left(1 - \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2}\right)^3.$$

§. 84.

Die Evolute, deren Gleichung jetzt gefunden ist, gehört nach §. 35 noch mit einer zweiten Curve zusammen, deren Gleichung aus der Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = 0$ an die erste Curve gefunden wird und nach §. 59 ist:

$$(E^2 - GC)y^2 + 2(BG - DE)xy + (D^2 - AG)x^2 + 2(CD - BE)y + 2(AE - BD)x + B^2 - AC = 0.$$

Legen wir aber die Gleichung

$$\frac{y^2}{\text{tng } b^2} + \frac{x^2}{\text{tng } a^2} = 1$$

zum Grunde, so finden wir als Gleichung an die zweite Curve:

$$\frac{y^2}{\text{tng } a^2} + \frac{x^2}{\text{tng } b^2} = \frac{1}{\text{tng } a^2 . \text{tng } b^2};$$

oder auch: $y^2 . \text{tng } b^2 + x^2 \text{ tng } a^2 = 1$, d. h.:

$$\frac{y^2}{\text{tng } (90° - b)^2} + \frac{x^2}{\text{tng } (90° - a)^2} = 1.$$

Wird also $90° - b = a'$ und $90° - a = b'$ gesetzt, so sind a' und b' die große und kleine Halbaxe des zweiten Kegelschnitts. Daher liegen die Scheitel der kleinen Axe der einen Curve in der großen Axe der anderen Curve, und umgekehrt.

Setzt man: $\cos e = \frac{\cos a}{\cos b}$ und $\cos e' = \frac{\cos a'}{\cos b'}$, so sind e und e' die Excentricitäten der beiden Kegelschnitte und es ist also auch: $\cos e' = \frac{\sin b}{\sin a}$. Daher hat man: $\cos e \cos e' = \frac{\text{tng } b}{\text{tng } a}$. Wenn man a eliminirt, so findet man:

$$\text{tng } b . \text{tng } e' = \sin e;$$

und wenn man b eliminirt, so erhält man:

$$\text{tng } a . \sin e' = \text{tng } e,$$

zum Ausdruck des Zusammenhanges unter den beiden Excentricitäten.

Da $\sin 2a = \sin 2b'$ und $\sin 2b = \sin 2a'$, $\cos 2a = a - \cos 2b'$ und $\cos 2b = -\cos 2a'$ ist, so erhellet auch hier ganz deutlich, was schon im §. 35 in größter Allgemeinheit bewiesen ist, daß die beiden Curven dieselbe Evolute haben.

§. 85.

Da die Rectification und Quadratur der Kegelschnitte mit Ausnahme des Kreises von der Integration der elliptischen Integrale abhängt, wie man bald findet, und also in geschlossenen Ausdrücken bis jetzt unmöglich ist, so übergehen wir die Aufstellung der darauf bezüglichen Differenziale hier völlig, und stellen dafür in einigen Aufgaben die sphärischen Kegelschnitte als sogenannte geometrische Oerter dar. Die erste Aufgabe mag die folgende seyn.

Wenn Fig. 19. das Dreieck VRS mit dem gleichschenkeligen Dreiecke VAB den Winkel V gemein hat, so sind die beiden Dreiecke bekanntlich gleich groß, wenn:

$$\text{tng } ½ \text{ VR} . \text{tng } ½ \text{ VS} = \text{tng } ½ \text{ VA}^2 = \text{tng } ½ \text{ VB}^2.$$

Dieser Bedingungsgleichung kann die Linie RS auf unzählige Arten Genüge leisten, und man sucht daher diejenige Curve, welche von ihr jedesmal berührt wird.

Man nehme die Schenkel des Winkels AVB = v zu Coordinaten-Axen, also: VX = 90° und VY = 90°; dann ist XY = v die Cardinale; ferner sey: VR = t und VS = u, VA = VB = k und $\text{tng } ½ \text{ k} = \alpha$; dann ist die Bedingungsgleichung:

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} t \,.\, \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} u = \alpha^2;$$

und wird sie differenzirt, so hat man:

$$\frac{\partial t}{\sin t} + \frac{\partial u}{\sin u} = o.$$

Die Gleichung an RS ist weiter: $x \cot t + y \cot u = 1$; sie muß bekanntlich ebenfalls differenzirt werden, wobei x und y als constant anzusehen sind, und hierdurch erhält man:

$$\frac{x\partial t}{\sin t^2} + \frac{y \,.\, \partial u}{\sin u^2} = o.$$

Aus diesen beiden Differenzialgleichungen aber findet man

$$x = \frac{\sin t}{\cos t + \cos u} \text{ und } y = \frac{\sin u}{\cos t + \cos u}$$

zur Bestimmung des Berührungspunktes M in der Linie RS oder in der unbekannten Curve.

Diese Ausdrücke haben eine bekannte Form, und nach §. 16 ist der Berührungspunkt M gerade die Mitte von RS; daher wird die Linie RS in allen ihren Lagen vom Berührungspunkte der Curve halbirt.

Ferner ist nach §. 16:

$$y + x = \operatorname{tng}\left(\frac{u+t}{2}\right) \text{ und } y - x = \operatorname{tng}\left(\frac{u-t}{2}\right),$$

oder: $$y + x = \frac{\operatorname{tng} \frac{u}{2} + \operatorname{tng} \frac{t}{2}}{1 - \alpha^2} \text{ und } y - x = \frac{\operatorname{tng} \frac{u}{2} - \operatorname{tng} \frac{t}{2}}{1 + \alpha^2}.$$

Hieraus findet man rückwärts:

$$\operatorname{tng} \frac{1}{2} t = x - y \,.\, \alpha^2 \text{ und } \operatorname{tng} \frac{1}{2} u = y - x \,.\, \alpha^2;$$

und werden diese Werthe in der Bedingungsgleichung $\operatorname{tng}\frac{1}{2} t \,.\, \operatorname{tng}\frac{1}{2} u = \alpha^2$ substituirt, so erhält man, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$m = \frac{\alpha^2 + \alpha^{-2}}{2},$$

die einfache Gleichung an die gesuchte Curve:

$$y^2 - 2mxy + x^2 = -1.$$

Hiernach ist die Curve ein Kegelschnitt, und der Anfangspunkt V selbst ist einer von ihren beiden äußeren Mittelpunkten.

§. 86.

Zur genaueren Kenntniß dieses Kegelschnitts verlegen wir die erste Axe in die Linie VC, welche den Winkel v und daher auch die Cardinale XY halbirt; die zweite Coordinaten-Axe aber mag

senkrecht auf der ersten seyn. Diese Coordinatenverwandlung wird nach §. 18 vorgenommen, indem man setzt:

$$\frac{x\sin\frac{v}{2} - y\cos\frac{v}{2}}{\sin v} \text{ für } x,$$

$$\text{und } \frac{x\sin\frac{v}{2} + y\cos\frac{v}{2}}{\sin v} \text{ für } y.$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke erhält die Gleichung $y^2 - 2mxy + x^2 = -1$ die Form:

$$x^2 . \cot a'^2 - y^2 . \cot b'^2 = 1,$$

und zur Bestimmung der beiden Halbaxen a′ und b′ (für den äußeren Mittelpunkt V) hat man dann die Gleichungen:

$$\cot a'^2 = \frac{m-1}{2\cos\frac{v^2}{2}} = \frac{m-1}{1+\cos v},$$

$$\cot b'^2 = \frac{m+1}{2\sin\frac{v^2}{2}} = \frac{m+1}{1-\cos v}.$$

Weil nun aber $\alpha = \operatorname{tng}\frac{1}{2}k$ ist, so findet man:

$$m-1 = \frac{\left(\operatorname{tng}\frac{1}{2}k - \cot\frac{1}{2}k\right)^2}{2} = 2\cot k^2,$$

$$m+1 = \frac{\left(\operatorname{tng}\frac{1}{2}k + \cot\frac{1}{2}k\right)^2}{2} = \frac{2}{\sin k^2}.$$

Daher hat man denn zur Bestimmung von a′ und b′ die beiden einfachen Ausdrücke:

$$\operatorname{tng} a' = \operatorname{tng} k . \cos\frac{v}{2} \text{ und } \operatorname{tng} b' = \sin k . \sin\frac{v}{2}.$$

Dem ersten Ausdrucke geben wir schon jetzt eine geometrische Bedeutung. Wird nämlich die Basis AB des gleichschenkeligen Dreiecks AVB von VC in G geschnitten, so ist: BG = AG und $\operatorname{tng} VG = \operatorname{tng} VB . \cos\frac{v}{2} = \operatorname{tng} k . \cos\frac{v}{2}$; daher ist: a′ = VG, und also G der Scheitel der Halbaxe VG oder CG der Curve. Ferner hat man: $\sin BG = \sin k . \sin\frac{v}{2}$, und also:

$$\operatorname{tng} b' = \sin BG = \sin AG.$$

Ist ferner e die Excentricität für den inneren und e′ für den äußeren Mittelpunkt, also: $e+e'=90°$, so findet man: $\sin e'^2 = \sin k^2$, oder auch:

$$e' = k.$$

Wenn man daher mit dem Radius $VB=k$ einen Kreisbogen BF beschreibt, welcher VC in F schneidet, so ist F ein Brennpunkt der Curve.

Werden weiter die große und kleine Halbaxe für den inneren Mittelpunkt mit a und b bezeichnet, also:

$$CG=a \text{ und } CD=b,$$

so ist:

$$\cot a = \operatorname{tng} k . \cos \frac{v}{2} \text{ und } \operatorname{tng} b = \cos k . \operatorname{tng} \frac{v}{2} = \cos k . \operatorname{tng} CY,$$

woraus man sieht, daß immer $CY > BD$ ist.

Wenn man endlich diejenige Curve construirt, worin die sphärischen Mittelpunkte aller Berührungslinien RS enthalten sind, so fällt ihre große Axe über ED, und wenn μ einer von den beiden Brennpunkten in dieser Axe ist, so ist nach §. 84:

$$\sin C\mu = \frac{\operatorname{tng} e}{\operatorname{tng} a} = \cot k . \cot a = \cos \frac{v}{2}.$$

Daher ist: $C\mu + CY = 90°$, oder: $Y\mu = 90°$.

Hierdurch sind aber die beiden ursprünglichen Coordinaten-Axen VX und VY hinsichtlich ihrer Lage auf eine einfache Weise geometrisch bestimmt worden; denn es ist μ das sphärische Centrum des Hauptkreises VY; eben so ist aber der zu μ gehörige andere Brennpunkt auch das sphärische Centrum des Hauptkreises VX.

Anmerkung. Die so eben bewiesenen Lehrsätze sind zuerst, jedoch ohne Beweis, im fünften Aufsatze des zweiten Bandes des Journales für die reine und angewandte Mathematik ausgesprochen worden.

§. 87.

Werden über einer gegebenen Seite $=v$ als Hypotenuse mehrere sphärische rechtwinkelige Dreiecke construirt, so liegen die Scheitel der rechten Winkel in einem Kegelschnitte von besonderer Beschaffenheit. Nimmt man nämlich jene Seite zur Cardinalen, so ist die im §. 5 gefundene Bedingungsgleichung

$$x . y = \frac{\cos v}{\sin v^2}$$

der Lage eines Punktes M oder (x, y) die Gleichung an die Curve; der Anfangspunkt V selbst ist hiernach ein äußerer Mittelpunkt des Kegelschnitts. Da nun aber nach §. 77

$$x \cdot y = \frac{\operatorname{tng} a'^2 + \operatorname{tng} b'^2}{4} = \frac{\cot a^2}{4 \cos b^2}$$

und der Asymptotenwinkel $v = 2b$ ist, so findet man auf der Stelle: $\cot a^2 = \frac{\cos 2b}{\sin b^2}$, oder einfacher:

$$\sin a = \operatorname{tng} b = \operatorname{tng} \frac{v}{2}.$$

Der Ort für die Scheitel der rechten Winkel aller über einer gegebenen Hypotenuse zu construirenden rechtwinkeligen Dreiecke ist also ein Kegelschnitt, dessen kleine Axe die gegebene Hypotenuse selbst ist; die große Axe aber hängt von der kleinen ab, so daß der Sinus der Hälfte jener gleich der Tangente der Hälfte dieser ist.

In Ansehung der beiden Axen für den äußeren Mittelpunkt V gilt dieselbe Formel, nämlich: $\sin a' = \operatorname{tng} b'$.

Die Excentricität e für den inneren Mittelpunkt ist bestimmt durch die Formel:

$$\sin e = \operatorname{tng} b^2 = \sin a^2,$$

und den Parameter p für den Scheitel der großen Axe gibt die Formel $\operatorname{tng} p = \frac{1}{2} \sin 2a$.

Wird die große Axe 2a zur Abscissenlinie und der innere Mittelpunkt zum Anfangspunkte genommen, so erhält man, wenn x die Abscisse und y die Applicate bezeichnet, die Gleichung an die Curve:

$$\operatorname{tng} y^2 = \sin a^2 - \sin x^2.$$

Zusatz. Soll der Winkel XMY in dem über der Cardinale $XY = v$ construirten Dreiecke kein rechter seyn, sondern eine gegebene Größe $= m$ haben, so hat man die Gleichung: $\cos m^2 \cdot (1 + x^2 \sin v^2) \cdot (1 + y^2 \sin v^2) = (\cos v - x\, y \sin v^2)^2$, welcher gemäß die Ortscurve nun zu den Linien der vierten Ordnung gehört, da hingegen in der Planimetrie die Ortscurve jeden Falles ein Kreis ist, der Winkel m mag ein rechter seyn oder nicht. Hier ist also ein völliger Mangel irgend einer Analogie zwischen der Planimetrie und der Sphärik.

§. 88.

Die so eben beschriebene Ortscurve, welche längst bekannt ist, hat aber noch andere bemerkenswerthe Eigenschaften, welche noch unbekannt zu seyn scheinen, und zu deren Entwickelung wir jetzt übergehen.

Wenn in der Grundlinie MN eines sphärischen Dreiecks MON ein Punkt R so genommen wird, daß die von ihm aus nach dem

Scheitel des Gegenwinkels gezogene sphärisch-gerade RO diesen Winkel der Proportion

$$\frac{\sin ROM}{\sin RON}=\frac{m}{n}$$

gemäß theilt, so liegt der Scheitel O aller über MN construirten Dreiecke in einer Curve, deren Gleichung zu ermitteln ist.

Die aufgestellte Bedingungsgleichung formen wir sogleich in eine andere um; denn da immer

$$\frac{\sin RM}{\sin RN}=\frac{\sin OM \, . \sin ROM}{\sin ON \, . \sin RON}$$

ist, so ist sie offenbar gleichbedeutend der folgenden:

$$\frac{\sin RM}{\sin RN}=\frac{m \, . \sin OM}{n \, . \sin ON} \, .$$

In dem besonderen Falle, daß $m=n$ ist, drückt jede der beiden Gleichungen aus, daß der Winkel MON von der Linie RO halbirt werden soll.

Nimmt man den festen Punkt R zum Anfangspunkt, sind $RQ=x$ und $QO=z$ die Abscisse und senkrechte Applicate für den Punkt O, ist ferner $RM=\alpha$ und $RN=\beta$, so ist: $\cos NO=\cos z \cos(\beta+x)$ und $\cos MO=\cos z \cos(\alpha-x)$.

Daher hat man die Gleichung:

$$\frac{\sin \alpha^2}{\sin \beta^2}=\frac{m^2-m^2 \cos z^2 \cos(\alpha-x)^2}{n^2-n^2 \cos z^2 \cos(\beta+x)^2},$$

welche sich sehr leicht umformen läßt in:

$$\frac{\sin \alpha^2}{\sin \beta^2}=\frac{m^2 \operatorname{tng} z^2+m^2 \sin(\alpha-x)^2}{n^2 \operatorname{tng} z^2+n^2 \sin(\beta+x)^2} \, .$$

Diese Gleichung gehört offenbar einem Kegelschnitte an. Um den Durchschnittspunkt der Curve und der Abscissenlinie RM kennen zu lernen, hat man $z=o$ zu setzen, wodurch man findet:

$$\pm\frac{m \sin(\alpha-x)}{n \sin(\beta+x)}=\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \, .$$

Daher gibt es zwei solche Durchschnittspunkte, wie vorauszusehen war. Der eine ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{m}{n}\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin(\beta+x)}=\frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

welche sich umformen läßt in:

$$\frac{\cot x-\cot \alpha}{\cot x+\cot \beta}=\frac{n}{m},$$

oder auch in: $\cot x=\dfrac{m \cot \alpha+n \cot \beta}{m-n}$.

Wenn also $m>n$ ist, so liegt dieser Durchschnittspunkt,

welcher mit A bezeichnet seyn mag, zwischen R und M; wenn aber m=n ist, so fällt der Punkt A mit R zusammen.

Daher ist denn: $\cot RA = \frac{m \cot RM + n \cot RN}{m - n}$.

Wird der andere Durchschnittspunkt mit B bezeichnet, so findet man eben so:

$$\cot RB = \frac{m \cot RM - n \cot RN}{m + n}.$$

Man hat ferner die beiden Proportionen:

$$\frac{\sin RM}{\sin RN} = \frac{m \cdot \sin AM}{n \cdot \sin AN} \text{ und } \frac{\sin RM}{\sin RN} = \frac{m \cdot \sin BM}{n \cdot \sin BN},$$

und aus der Verbindung beider folgt noch:

$$\frac{\sin AM}{\sin AN} = \frac{\sin BM}{\sin BN};$$

d. h., die Abscissenlinie ist in den vier Punkten N, A, M, B harmonisch getheilt; und die Punkte A und B sind, wie bald noch deutlicher erhellen wird, zwei Scheitel des Kegelschnitts.

Zum Ausdruck der Applicate des Anfangspunktes findet man die Formel:

$$\cot z^2 = \frac{m^2 \sin \beta^2 - n^2 \sin \alpha^2}{(n^2 - m^2) \sin \alpha^2 \sin \beta^2}.$$

Wird also angenommen, daß $m > n$ sey, so ist z unmöglich, oder es müßte seyn: $m \sin \beta < n \sin \alpha$, also: $\frac{m}{n} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, oder:

$$\sin NO < \sin MO.$$

Wenn m=n ist, so findet man z=o, wie ohnehin bekannt, weil dann die Curve durch den Punkt R geht.

§. 89.

Um eine genauere Kenntniß von der Beschaffenheit der in Rede stehenden Curve zu erlangen, schaffen wir in der Gleichung an dieselbe die Nenner fort, wodurch sie wird:

$$\operatorname{tng} z^2 = \frac{n^2 \sin \alpha^2 \sin (\beta + x)^2 - m^2 \sin \beta^2 \sin (\alpha - x)^2}{m^2 \sin \beta^2 - n^2 \sin \alpha^2}.$$

Man sieht hieraus, daß die Abscissenlinie RM selbst die Richtung einer Axe hat, und daß also zwei Mittelpunkte der Curve hierin liegen.

Ist etwa C einer der beiden Mittelpunkte, und zwar der innere, und $RC = \lambda$, so verlegt man den Anfangspunkt nach C, wenn man in der vorigen Gleichung $x + \lambda$ für x setzt; daher hat man:

$$\operatorname{tng} z^2 = \frac{n^2 \sin \alpha^2 \sin (\beta + \lambda + x)^2 - m^2 \sin \beta^2 \sin (\alpha - \lambda - x)^2}{m^2 \sin \beta^2 - n^2 \sin \alpha^2}.$$

Durch Entwickelung erhält diese Gleichung die Form:

$$\text{tng } z^2 = \frac{A \cos x^2 + 2B \sin x \cos x + C \sin x^2}{m^2 \sin \beta^2 - n^2 \sin \alpha^2};$$

und für die in ihr vorkommenden drei Constanten hat man dann die folgenden Ausdrücke:

$$A = n^2 \sin \alpha^2 \sin (\beta+\lambda)^2 - m^2 \sin \beta^2 \sin (\alpha-\lambda)^2,$$
$$B = n^2 \sin \alpha^2 \sin (\beta+\lambda) \cos (\beta+\lambda) + m^2 \sin (\alpha-\lambda) \cos(\alpha-\lambda) \sin \beta^2,$$
$$C = n^2 \sin \alpha^2 \cos (\beta+\lambda)^2 - m^2 \sin \beta^2 \cos (\alpha-\lambda)^2.$$

Die Coefficienten hangen in ziemlich einfacher Weise zusammen; denn man findet leicht:

$$A + C = n^2 \sin \alpha^2 - m^2 \sin \beta^2$$

$$\text{und } B^2 - AC = m^2 n^2 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \sin (\alpha+\beta)^2.$$

Weil nun aber der Punkt C der Mittelpunkt seyn soll, so muß der Coefficient $B = o$ seyn, und hierdurch wird die Abscisse λ des Mittelpunktes bestimmt. Es ist nämlich zunächst:

$$n^2 \sin \alpha^2 \sin (2\beta+2\lambda) = m^2 \sin (2\lambda - 2\alpha) . \sin \beta^2,$$

und hieraus zieht man:

$$\text{tng } 2\lambda = \frac{2(n^2 \cot \beta + m^2 \cot \alpha)}{m^2 (\cot \alpha^2 - 1) - n^2 (\cot \beta^2 - 1)} = \text{tng } 2RC.$$

Ist $2\lambda < 90°$ der eine durch diese Formel bestimmte Werth von 2λ, so genügt dieser Formel außer der Abscisse λ auch noch die Abscisse $90° + \lambda$, und da der Unterschied der beiden Abscissen $= 90°$ ist, so ist deutlich, daß durch diese Formel die Lage beider in der Abscissenlinie befindlichen Mittelpunkte des Kegelschnitts bestimmt werde.

Die Gleichung an den Kegelschnitt selbst ist unter dieser Voraussetzung:

$$\text{tng } z^2 = \frac{A \cos x^2 + C \sin x^2}{m^2 \sin \beta^2 - n^2 \sin \alpha^2},$$

$$\text{oder auch: tng } z^2 = \frac{-A \cos x^2 - C \sin x^2}{A + C}.$$

Setzt man nun $z = a$ für $x = o$ und $x = b$ für $z = o$, so sind a und b zwei Halbaxen für den inneren Mittelpunkt C, und man hat zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\text{tng } a^2 = \frac{-A}{A + C} \text{ und tng } b^2 = \frac{-A}{C}.$$

Aber aus der ersten Gleichung folgt: $\sin a^2 = \frac{-A}{C}$; daher hat man denn:

$$\sin a = \text{tng } b.$$

Daher ist denn das Stück AB der Abscissenlinie die kleine Axe für

den inneren Mittelpunkt C, und der Kegelschnitt hat übrigens dieselbe specielle Beschaffenheit, als der im §. 87 behandelte.

Wird also von Fig. 21 der Kegelschnitt vorgestellt, und wird die große Axe ED gezogen, so ist:

$$\sin CD = \operatorname{tng} CA,$$

und die Peripheriewinkel AOB, AO'B ꝛc. sind rechte.

Da ferner $(1 - \operatorname{tng} b^2)^2 = \frac{(A+C)^2}{C^2}$ ist, so hat man:

$\frac{\operatorname{tng} b^2}{(1-\operatorname{tng} b^2)^2} = \frac{-AC}{(A+C)^2}$, und da $\left(\frac{2 \operatorname{tng} b}{1 - \operatorname{tng} b^2}\right)^2 = \operatorname{tng} 2b^2$ ist, so findet man:

$$\operatorname{tng} 2b = \operatorname{tng} AB = \frac{2\sqrt{(-AC)}}{A+C}, \text{ oder:}$$

$$\operatorname{tng} AB = \pm \frac{2mn \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}{n^2 \sin \alpha^2 - m^2 \sin \beta^2},$$

wobei man aber nur die absolute Größe als Werth von tng AB verstehen wird. In dem besonderen Falle $m = n$ bleibt die Formel $\sin CD = \operatorname{tng} CA$ unverändert; aber man hat nun einfacher:

$$\operatorname{tng} 2\lambda = \frac{2(\cot \beta + \cot \alpha)}{\cot \alpha^2 - \cot \beta^2} = \frac{2}{\cot \alpha - \cot \beta},$$

$$\text{oder: } \cot 2\lambda = \frac{\cot \alpha - \cot \beta}{2}$$

$$\text{und } \operatorname{tng} AB = \pm \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}, \text{ oder ebenfalls:}$$

$$\cot AB = \frac{\cot \alpha - \cot \beta}{2},$$

wie vorauszusehen war; denn in diesem besonderen Falle geht die Curve durch R, und es fällt also A mit R zusammen, woraus folgt, daß nun $2\lambda = AB$ ist.

Wir können nun das bewiesene allgemeine Theorem, wie folgt, zusammenfassen: **Wenn ADBE ein solcher Kegelschnitt ist, daß alle über seiner kleinen Axe AB construirten Peripheriewinkel AOB, AO'B ꝛc. rechte Winkel sind, so kann man in dieser Axe einen Punkt M willkürlich und in der Verlängerung einen Punkt N so bestimmen, daß BMAN harmonisch getheilt ist; wenn man dann ferner einen Punkt R in derselben Linie willkürlich wählt und die Dreiecke NOM, NO'M ꝛc. construirt, so werden in ihnen die Winkel O, O' ꝛc. von den Linien RO, RO' ꝛc. jedesmal so getheilt, daß ist:**

$$\frac{\sin NOR}{\sin MOR} = \frac{\sin NO'R}{\sin MO'R} = \text{rc.}$$

Ferner ist: $\frac{\sin NO}{\sin MO} = \frac{\sin NO'}{\sin MO'} = \frac{\sin NA}{\sin MA} = \text{rc.}$

Wird endlich der Punkt R in A selbst angenommen, so ist immer:

Winkel NOA = MOA; Winkel NO'A = MO'A rc.

oder, was auf dasselbe herauskommt:

NOA + MOB = 90°; NO'A + MO'B = 90°; u. s. w.,

oder auch: BOM + BON = 180°; BO'M + BO'N = 180°; u. s. w.

Alle diese Eigenschaften also hat der eben behandelte Kegelschnitt mit dem ebenen Kreise gemein. Diese Eigenschaften des ebenen Kreises scheinen aber ebenfalls noch nicht erkannt worden zu seyn; denn nur der specielle Fall, in welchem der Punkt R mit A zusammenfällt, pflegt in den vom ebenen Kreise handelnden Lehrbüchern aufgeführt oder behandelt zu werden, ohne dem Punkte R eine mehr unbestimmte Lage in der Linie NAMB zu geben.

§. 90.

Mit der vorigen Untersuchung verbindet sich in natürlicher Weise die folgende, welche die Ermittelung einer Curve betrifft, die immer von einem Quadranten eines größten Kreises berührt wird, dessen beide Endpunkte sich auf den Schenkeln eines stumpfen Winkels = v bewegen.

Nimmt man die Schenkel dieses Winkels zu Coordinaten-Axen und werden sie von den Endpunkten des Quadranten AB = 90° in A und B getroffen, so hat man, wenn der Anfangspunkt mit V bezeichnet und VA = t, VB = u gesetzt wird, die Bedingungsgleichung:

$$1 + \operatorname{tng} t \,.\, \operatorname{tng} u \,.\, \cos v = o,$$

und die Gleichung an AB ist dann:

$$x \,.\, \cot t + y \,.\, \cot u = 1.$$

Die Differenzialgleichungen sind: $\frac{\cot t \,.\, \partial u}{\sin u^2} + \frac{\cot u \,.\, \partial t}{\sin t^2} = o$ und $\frac{y \; \partial u}{\sin u^2} + \frac{x \,.\, \partial t}{\sin t^2} = o$. Daher hat man denn: $y \cot u = x \cot t$, und also weiter:

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{tng} t \text{ und } y = \frac{1}{2} \operatorname{tng} u,$$

wodurch die Lage des Berührungspunktes M oder (x, y) im Quadranten AB bestimmt ist. Vergleicht man diese Resultate mit den im §. 80 gefundenen, so sieht man schon daraus, daß die Curve ein

Kegelschnitt und der Scheitel V des gegebenen stumpfen Winkels v ein äußerer Mittelpunkt ist, und daß endlich die Schenkel des Winkels selbst ein Paar Tangenten oder Asymptoten des Kegelschnitts sind. Substituirt man die Ausdrücke $\text{tng } t = 2x$ und $\text{tng } u = 2y$ in der Gleichung $1 + \text{tng } t . \text{tng } u . \cos v = o$, so verwandelt sie sich in:

$$x . y = \frac{1}{-4 \cos v}.$$

Man sieht hieraus, daß die Cardinale $XY = v$ selbst eine von den beiden Axen für den inneren Mittelpunkt sey, und zwar die große Axe, welche mit $2a$ bezeichnet seyn mag, während die zugehörige kleine Axe $2b$ genannt werde. Zur Bestimmung von b findet man nun aber:

$$\cos b = \cot a = \cot \frac{v}{2}.$$

Man sieht hieraus, daß die Curve mit der im §. 87 behandelten in einem solchen Zusammenhange steht, daß die sphärischen Mittelpunkte der Berührungslinien der einen sich jedesmal in der anderen befinden, wenn nur die hier und dort gebrauchten Werthe von v sich zu 180° oder ihre Hälften zu 90° ergänzen und die beiden Curven sonst noch so gelegt werden, daß ihre drei Mittelpunkte zusammenfallen.

Wenn statt des stumpfen Winkels v ein spitzer Winkel genommen wird, so liegt der Berührungspunkt M nicht im Quadranten AB selbst, sondern in seiner Verlängerung, und es befindet sich dann überhaupt die von ihm berührte Curve im Inneren des Nebenwinkels vom angenommenen; und wenn endlich der Winkel v selbst ein rechter ist, so gibt es gar keine Curve, die immer vom Quadranten AB berührt wird. Die Formel $xy = \frac{1}{-4 \cos v}$ gibt in diesem Falle entweder $x = \frac{1}{o}$ oder $y = \frac{1}{o}$; d. h., der Quadrant AB geht dann immer entweder durch den einen oder durch den anderen Cardinalpunkt, wie auch ohnehin bekannt ist.

§. 91.

Wenn von einem Punkte V (Fig. 22) drei Linien VM, VR, VN ausgehen, welche von einer vierten in M, R, N geschnitten werden, und zwar so, daß das Verhältniß

$$\frac{\sin MR}{\sin NR} = \frac{m}{n}$$

unveränderlich bleibt, so kann sich die Linie MN, indem sie die an-

gegebene Bedingung erfüllt, zwischen den drei ersten festen Geraden bewegen, wobei sie immer eine Curve berührt, deren Gleichung jetzt ermittelt werden soll.

Setzen wir den Winkel RVM $= \alpha$ und den Winkel RVN $= \beta$, ferner VM $=$ t und VN $=$ u, so ist auch:

$$\frac{\sin MR}{\sin NR} = \frac{\sin VM . \sin MVR}{\sin VN . \sin NVR}.$$

Daher kann die obige Bedingungsgleichung auch also ausgedrückt werden:

$$\frac{m \sin \beta}{n \sin \alpha} = \frac{\sin t}{\sin u},$$

und indem zur Vereinfachung gesetzt wird:

$\sin \beta' = m \sin \beta$ und $\sin \alpha' = n \sin \alpha$,

ist die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\sin t}{\sin u} = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'},$$

die sich umformen läßt in:

$$\sin \alpha'^2 . \cot u^2 - \sin \beta'^2 . \cot t^2 = \sin \beta'^2 - \sin \alpha'^2.$$

Ferner ist die Gleichung an den Hauptkreis MN:

$$y \cot u + x . \cot t = 1.$$

Die beiden Differenzialgleichungen sind also:

$$x . \partial(\cot t) + y . \partial(\cot u) = o \text{ und}$$

$$\sin \alpha'^2 \cot u . \partial(\cot u) = \sin \beta'^2 . \cot t . \partial(\cot t),$$

aus deren Verbindung dann folgt:

$$\frac{\sin \alpha'^2 . \cot u}{y} + \frac{\sin \beta'^2 . \cot t}{x} = o.$$

Aus ihr und der Gleichung $y . \cot u + x . \cot t = 1$ zieht man dann weiter:

$$\cot t = \frac{x \sin \alpha'^2}{x^2 \sin \alpha'^2 - y^2 \sin \beta'^2},$$

$$\cot u = \frac{-y . \sin \beta'^2}{x^2 . \sin \alpha'^2 - y^2 \sin \beta'^2}.$$

Wenn man diese Ausdrücke umkehrte, so würde man x und y durch t und u ausdrücken und dadurch die Lage des Berührungspunktes im Hauptkreise MRN bestimmen. Diese Umkehrung ist für unsere Zwecke unnöthig. Substituiren wir die beiden Werthe von cot t und cot u in der Bedingungsgleichung $\sin \alpha'^2 . \cot u^2 - \sin \beta'^2 \cot t^2 = \sin \beta'^2 - \sin \alpha'^2$, so verwandelt sie sich in:

$$y^2 \sin \beta'^2 - x^2 \sin \alpha'^2 = \frac{\sin \beta'^2 - \sin \alpha'^2}{\sin \alpha'^2 . \sin \beta'^2} (y^2 \sin \beta'^2 - x^2 \sin \alpha'^2)^2,$$

und dieses ist die gesuchte Gleichung an die Curve, die immer vom

Hauptkreise MRN berührt werden muß, wenn er von der Linie MR der Proportion $\frac{\sin MR}{\sin NR} = \frac{m}{n}$ gemäß getheilt werden soll.

Diese Gleichung ist zwar vom vierten Grade, aber sie kann in die beiden folgenden quadratischen zerlegt werden:

$$y^2 \sin \beta'^2 - x^2 . \sin \alpha'^2 = o,$$

$$y^2 . \sin \beta'^2 - x^2 . \sin \alpha'^2 = \frac{\sin \alpha'^2 . \sin \beta'^2}{\sin \beta'^2 - \sin \alpha'^2}.$$

§. 92.

Die erste Gleichung gehört einem Systeme von zwei Hauptkreisen, deren Gleichungen sind:

$$y = + \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} . x,$$

$$y = - \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} . x,$$

und die also beide durch den Anfangspunkt V gehen.

In Beziehung auf diese beiden Hauptkreise hat man unabhängig von den besonderen Werthen der Größen x und y die Werthe:

$$t = u = o;$$

d. h., wenn der Hauptkreis MRN eine von den beiden Linien des Systemes berührt, so muß er durch den Anfangspunkt V selbst gehen; dann ist aber seine Länge zwischen VX und VY = o, und es kann daher von der Theilung dieser Länge, welche durch VR hervorgebracht wird, nicht füglich die Rede seyn, da nun jeder Theil selbst = o ist.

Aber diese beiden den Gleichungen $y = \pm \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} x$ zugehörigen Hauptkreise, welche unter VA und VB vorgestellt werden mögen, haben eine bemerkenswerthe Lage.

Werden nämlich sowohl sie, als auch VR verlängert, bis die Cardinale XY davon in a, b, r geschnitten wird, so ist:

$$\frac{\sin aX}{\sin aY} = \frac{n \sin \alpha}{m \sin \beta} \text{ und } \frac{\sin bX}{\sin bY} = \frac{n \sin \alpha}{m \sin \beta},$$

$$\text{und also: } \frac{\sin aX}{\sin aY} = \frac{\sin bX}{\sin bY};$$

d. h., die Cardinale XY wird mit Uebergehung des Punktes r von Va und Vb harmonisch getheilt. Daher wird aber weiter von den vier Linien VX, Va, VY, Vb jede fünfte harmonisch getheilt, und es ist insbesondere:

$$\frac{\sin AM}{\sin AN} = \frac{\sin BM}{\sin BN}.$$

Es bleibt noch übrig die Betrachtung der Gleichung:

$$y^2 \sin \beta'^2 - x^2 \sin \alpha'^2 = - \frac{\sin \alpha'^2 \sin \beta'^2}{\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2};$$

und in Beziehung auf sie hat man die Ausdrücke:

$$\cot t = \frac{x (\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2)}{\sin \beta'^2},$$

$$\cot u = \frac{-y (\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2)}{\sin \alpha'^2};$$

woraus man sieht, daß der Bogen MRN, indem er die Curve berührt, die beiden Coordinaten-Axen VX und VY wirklich schneidet, ohne durch den Anfangspunkt V zu gehen.

Man sieht aus der Gleichung an die Curve ferner, daß sie ein Kegelschnitt und der Anfangspunkt V ein äußerer Mittelpunkt ist; auch erhellet, daß die beiden Coordinaten-Axen VX und VY selbst zwei conjugirte Durchmesser der Richtung nach sind, und daß also der innere Mittelpunkt der Curve in der Cardinale XY oder ihrer Verlängerung enthalten ist.

§. 93.

Die Gleichung an die Curve hat die Form $y^2 . \cot B^2 - x^2 \cot A^2 = -1$, und es ist also:

$$\cot A^2 = \frac{\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2}{\sin \beta'^2} \text{ und } \cot B^2 = \frac{\sin \alpha'^2 - \sin \beta'^2}{\sin \alpha'^2},$$

indem wir $\sin \alpha' > \sin \beta'$ annehmen. Daher hat man denn:

$$\operatorname{tng} B^2 - \operatorname{tng} A^2 = 1, \text{ oder:}$$

$$\cot B = \cos A,$$

und es ist also: $B > A$. Sind nun a' und b' die zwei Halbaxen für den äußeren Mittelpunkt V, so ist nach §. 81:

$$\operatorname{tng} b'^2 - \operatorname{tng} a'^2 = \operatorname{tng} B^2 - \operatorname{tng} A^2,$$

und also auch: $\operatorname{tng} b'^2 = 1 + \operatorname{tng} a'^2$, oder:

$$\cot b' = \cos a'.$$

Daher ist denn auch: $b' > a'$. So wie wir zu diesem Resultate ohne Coordinatenverwandlung gelangt sind, können wir auch auf einfache Weise die beiden Scheitel einer Axe für den inneren Mittelpunkt finden. Legen wir nämlich von V aus zwei Tangenten an die Curven, so ist nach §. 53 die Gleichung an das System dieser beiden Tangenten:

$$y^2 \cot B^2 - x^2 \cot A^2 = 0,$$

oder also: $y^2 \sin \beta'^2 - x^2 \sin \alpha'^2 = 0.$

Diese beiden Tangenten sind offenbar Asymptoten, da V ein äußerer Mittelpunkt ist, und man sieht, daß die Linie Va und Vb selbst die beiden Asymptoten sind; wird also der Bogen ab der Cardinale (eine Axe) halbirt, so ist die Mitte C der innere Mittelpunkt des Kegelschnitts.

Wird ferner VC gezogen und Vd = a′ genommen, so ist d ein Scheitel der zweiten Halbaxe Cd für den inneren Mittelpunkt, und es ist: $Cd = 90° - a'$.

Wenn $m = n$ ist, so ist auch: $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$, und es fällt dann also eine von den beiden Asymptoten Va und Vb mit der theilenden Linie Vr selbst zusammen. Es bleibt noch die Ermittelung des Zusammenhanges unter den beiden Halbaxen Cd und $Cb = Ca$ für den inneren Mittelpunkt C übrig.

Nimmt man aber in Fig. 16 an, daß, wie im vorliegenden Falle, $\cos a' = \cot b'$ und also $\cos QA = \cot QL$ für den äußeren Mittelpunkt Q (früher V) sey, so ist $\text{tng}\, CD = \text{tng}\, QL \,.\, \cot QA$, also: $\text{tng}\, CD \,.\, \cos QA = \cot QA$, oder: $\cot CD = \sin QA$, d. h.: $\cot CD = \cos CA$, und also: $CA < CD$.

Weiter ist für den anderen äußeren Mittelpunkt S offenbar: $SL + QL = 90°$ und $SD + CD = 90°$, also: $\text{tng}\, SD = \cos CA$; da aber auch $\text{tng}\, SL = \sin CA$ ist, so hat man offenbar: $\text{tng}\, SD^2 + \text{tng}\, SL^2 = 1$.

Wenn man daher im Vierecke $LSD\alpha$ die Diagonale $S\alpha$ zieht, welche offenbar mit $A\alpha$ einen Quadranten ausmacht, so ist: $\text{tng}\, S\alpha^2 = \text{tng}\, SD^2 + \text{tng}\, SL^2 = 1$, und also: $S\alpha = A\alpha = 45°$.

Aus der Gleichung $\cot CD = \cos CA$ sieht man schließlich, daß die jetzt betrachtete Curve von derselben Art ist mit der im §. 90 behandelten.

§. 94.

Man kann nun das hier bewiesene Theorem mit dem im §. 90 bewiesenen zu einem Ganzen zusammenfassen.

Wenn ein Quadrant AB sich zwischen den Schenkeln Va und Vb eines stumpfen Winkels aVb bewegt, so berührt er immer einen Kegelschnitt adbe (Fig. 23), dessen drei Mittelpunkte sind C, V, W, und es ist immer:

$$\cos Cd = \cot Ca,$$

und umgekehrt. Wenn man dann ferner in ab einen Punkt m willkürlich und den Punkt n in der Verlängerung so bestimmt, daß bman harmonisch getheilt ist, so kann man noch den Punkt r in ab oder ihrer Verlängerung willkürlich wählen und von V aus die Quadranten Vm, Vn, Vr ziehen, und diese Quadranten schneiden dann alle Tangenten der Curve $A\pi B$, $A'\pi'B'$ 2c. so, daß ist:

$$\frac{\sin NR}{\sin MR} = \frac{\sin N'R'}{\sin M'R'} = \text{ic.}$$

Ferner werden diese Quadranten selbst von den Tangenten so geschnitten, daß ist:

$$\frac{\sin VM}{\sin VN} = \frac{\sin VM'}{\sin VN'} = \text{ic.}$$

Man kann auch den Punkt r im Scheitel a zwischen m und n annehmen; dann ist noch einfacher:

$$MA = NA;\ M'A' = N'A' \text{ ic.}$$

Nimmt man r in b an, so folgt:

$$MB + NB = 180^\circ;\ M'B' + N'B' = 180^\circ.$$

Schließlich wird man beachten, daß dieses allgemeine Theorem das reciproke von dem im §. 89 ausgesprochenen ist und daß man auch unmittelbar von jenem hätte auf dieses schließen können.

Von der centrischen Theilung der sphärisch-geraden Linien.

§. 95.

Bei sphärischen Constructionen hat man es zwar mit Winkeln und Bogen größter Kreise unmittelbar selbst zu thun; aber in den sich darauf beziehenden Gleichungen oder Rechnungsausdrücken kommen jene Größen selten unmittelbar vor, sondern in der Regel bieten sie sich allererst mittelst ihrer trigonometrischen Functionen als Elemente der Rechnung dar. Eben so selten kommt es auch vor, daß ein Bogen eines größten Kreises nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden soll, wenn man von dem speciellen Falle der Halbirung eines solchen Bogens absieht, und wir nennen deßwegen eine sphärisch-gerade Linie häufig schon dann nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt, wenn gewisse trigonometrische Functionen der Theile, etwa die Sinus oder Tangenten derselben, in dem gegebenen Verhältnisse stehen. Ist, z. B., ein Bogen A so in zwei Theile α und β getheilt, daß

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{m}{n}$$

ist, so kann man den Bogen A selbst nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt nennen, wenn sonst keine Zweideutigkeit zu befürchten steht.

In Ansehung solcher Theilungen sind also viele willkürliche Voraussetzungen möglich, deren nähere Betrachtung aber in Hinsicht der daraus zu ziehenden Folgerungen und davon zu machenden

Anwendungen von ungleichem Interesse ist. Eine Art der Theilung gibt es aber, welche wegen der Allgemeinheit ihres Begriffes mehrere specielle Formen unter sich hat und zahlreiche Folgerungen zuläßt, welche ein großes Licht über die sphärischen Constructionen überhaupt und die Kegelschnitte insbesondere verbreiten. Diese Art der Theilung mag die centrische Theilung genannt werden; der Grund dieser Benennung wird sich später darthun. Zu dem Begriffe dieser Theilung aber führt uns hier die Analogie zwischen der Planimetrie und der Sphärik.

Wenn Fig. 24 eine Gerade MN in einer Ebene auf die beiden Coordinaten-Axen VX und VY bezogen und VPOQ das Coordinaten-Parallelogramm für den Punkt O der Geraden MN ist, wodurch sie der Proportion

$$\frac{MO}{NO} = \frac{m}{n}$$

gemäß getheilt wird, so ist, wenn $VM = A$, $VN = B$, $VP = QO = x$ und $VQ = PO = y$ gesetzt wird, die Gleichung an die Linie MN bekanntlich:

$$\frac{y}{B} + \frac{x}{A} = 1;$$

und da der Punkt O in ihr durch die vorstehende Proportion bestimmt ist, so findet man für ihn:

$$x = \frac{nA}{m+n} \text{ und } y = \frac{mB}{m+n}.$$

Diese Theilung nun wird uns zum Vorbilde dienen bei der Theilung der sphärisch-geraden Linien.

§. 96.

Es sey in Fig. 25 die Linie XY die Cardinale des Anfangspunktes V, und MN die zu theilende sphärisch-gerade Linie, deren Endpunkte in M und N die beiden Coordinaten-Axen VX und VY treffen. Wir setzen $VM = A$ $VN = B$ und $\operatorname{tng} A = a$, ferner $\operatorname{tng} B = b$, und schneiden auf den beiden Axen die Coordinaten $VP = \operatorname{arc}(\operatorname{tng} = x)$ und $VQ = \operatorname{arc}(\operatorname{tng} = y)$ so ab, daß ist, wie im §. 95:

$$x = \frac{na}{m+n} \text{ und } y = \frac{mb}{m+n}.$$

Der hierdurch bestimmte Punkt $O = (x, y)$ ist nun offenbar ein Punkt der Linie MN; denn es ist:

$$\frac{n}{m+n} = \frac{x}{a}; \quad \frac{m}{m+n} = \frac{y}{b},$$

und da $\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1$ ist, so ist auch: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, was zu

beweisen war. Wir sehen hier die größte Uebereinstimmung der Ausdrücke mit denen im §. 95; nur die Verschiedenheit waltet ob, daß das Coordinatenviereck VPOQ früher ein Parallelogramm war; jetzt aber sind die Gegenseiten dieses Vierecks nicht mehr gleich.

Wenn in einer sphärisch-geraden Linie MN nun ein Punkt O nach den vorstehenden Formeln $x = \frac{na}{m+n}$ und $y = \frac{mb}{m+n}$ bestimmt wird, so nennen wir die Linie MN vom Punkte O centrisch aus V nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt, und der Punkt V selbst heiße das Centrum der Theilung.

Der Zusatz „centrisch" bei Theilung sichert hinlänglich vor einem Mißverständnisse, welches zur Folge haben könnte, daß man die im §. 95 vorkommende Proportion $\frac{MO}{NO} = \frac{m}{n}$ auch hier anwendete. So wie aber diese Proportion unter den gegenwärtigen Umständen falsch ist, sind auch die beiden folgenden falsch: $\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m}{n}$ und $\frac{\text{tng } MO}{\text{tng } NO} = \frac{m}{n}$, obgleich wir die Linie MN selbst nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ centrisch getheilt nennen. Die beiden letzten Proportionen, obgleich im Allgemeinen falsch, gelten jedoch in besonderen Fällen, wovon weiter unten geredet wird.

§. 97.

Um nun aber die Relation zu finden, in der die Theile MO und NO der getheilten Linie MN stehen, ziehen wir noch aus dem Centrum V der Theilung die Linie VO nach dem Theilpunkte, und setzen die Winkel:

$$MVO = \alpha \text{ und } NVO = \beta.$$

Dann ist offenbar: $\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{\sin VM . \sin MVO}{\sin VN . \sin NVO} = \frac{\sin A . \sin \alpha}{\sin B . \sin \beta}$.

Ferner ist nach §. 7 das Verhältniß: $\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, und also:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{m \text{ tng } B}{n \text{ tng } A}$$

Die Benutzung dieser Proportion verwandelt die oberste in:

$$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m.\cos A}{n.\cos B},$$

oder: $$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m.\cos VM}{n.\cos VN}.$$

Nach dieser Proportion kann nun offenbar ohne den Gebrauch der Axen-Coordinaten eine Linie MN centrisch nach einem gegebenen Verhältnisse $\frac{m}{n}$ aus einem ebenfalls gegebenen Centrum V getheilt werden, daher denn diese Proportion als der allgemeinste Ausdruck der centrischen Theilung anzusehen ist, und alles diese Theilung Betreffende aus ihr hergeleitet werden kann. Man sieht aus dieser Proportion nun zunächst, daß die Größe der Theile MO und NO der centrisch getheilten Linie MN nicht von der Größe der Linie MN selbst und dem Theilungsverhältnisse $\frac{m}{n}$ allein abhängt, wie es gewöhnlich der Fall in der Planimetrie zu seyn pflegt, sondern auch die Lage des gegebenen Centrums V hat Einfluß auf die Theilung der Linie MN. Wenn also auch die Linie MN sammt dem Theilungsverhältnisse $\frac{m}{n}$ unverändert bleiben, so kann man gleichwohl andere und andere centrische Theilungen der Linie MN schon dadurch hervorbringen, oder veranlassen, daß man die Lage des Centrums V gegen die Linie MN gehörig verändert.

Das Centrum V der centrischen Theilung ist zugleich das sphärische Centrum desjenigen Hauptkreises, wozu die Cardinale XY gehört. Da nun $\cos VM = \sin MX$ und $\cos VN = \sin NY$ ist, so kann man die vorige Proportion auch also schreiben:

$$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m.\sin MX}{n.\sin NY},$$

und es ist hierdurch die centrische Theilung der Linie MN in ihrer Abhängigkeit von der Lage des Hauptkreises XY dargestellt. Die Linien MX und NY sind nämlich zwei Perpendikel, welche von den Endpunkten M und N der zu theilenden Linie auf den Hauptkreis XY gefällt worden sind.

§. 98.

Obgleich die Lage des Centrums gegen die zu theilende Linie MN allerdings Einfluß hat auf ihre centrische Theilung, so ist dieser Einfluß gleichwohl von der Art, daß nicht jede Abänderung in der Lage des Centrums eine Aenderung der centrischen Theilung zur Folge hat, vorausgesetzt, daß die Linie MN sammt ihrem Thei-

lungsverhältnisse dieselben bleiben. Wenn man nämlich in Fig. 26 vom Centrum V auf MN das Loth Vv fällt, so ist offenbar:

$$\frac{\cos VM}{\cos VN} = \frac{\cos Mv}{\sin Nv},$$

und hierdurch verwandelt sich die Proportion $\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m.\cos VM}{n.\cos VN}$ des §. 97 in die folgende:

$$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m.\cos vM}{n.\cos vN};$$

d. h., auch der Fußpunkt v des Lothes Vv in der Linie MN selbst kann statt des gegebenen Centrums V als Centrum für die centrische Theilung von MN genommen werden, ohne diese Theilung dadurch im mindesten zu verändern. Aus demselben Grunde kann auch statt V jeder andere Punkt in dem Perpendikel Vv als Centrum genommen werden, ohne die centrische Theilung der Linie MN dadurch in eine andere zu verwandeln. Daher ist denn das Perpendikel Vv selbst überhaupt der geometrische Ort des Punktes V für die centrische Theilung der Linie MN, und deßwegen mag es die **Centrale** der centrischen Theilung von MN heißen.

§. 99.

Wenn die Centrale Vv durch den Theilpunkt O selbst geht, so verwandelt sich die Proportion, wodurch die centrische Theilung von MN ausgedrückt wird, in:

$$\frac{\text{tng } MO}{\text{tng } NO} = \frac{m}{n}.$$

Wenn daher umgekehrt eine Linie MN nach dieser Proportion getheilt ist, so kann man die Theilung als eine centrische ansehen, und wenn man im Theilpunkte O auf MN ein Perpendikel errichtet, so ist es die Centrale der eben dadurch als centrisch dargestellten Theilung.

Eine andere specielle bemerkenswerthe Form der centrischen Theilung erhält man bei der Annahme, daß die Centrale Vv durch die (absolute) Mitte der Linie MN geht; denn unter dieser Voraussetzung verwandelt sich die allgemeine Proportion in die noch einfachere:

$$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m}{n}.$$

Dieser Fall tritt offenbar immer dann ein, wenn das Dreieck MVN gleichschenkelig, nämlich MV = NV ist.

Wenn daher umgekehrt eine Linie MN nach der Proportion

$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m}{n}$ getheilt ist, so kann man sich diese Theilung als eine centrische vorstellen; construirt man nämlich über MN als Basis ein gleichschenkeliges Dreieck MVN, so ist sein Scheitel V das Centrum der eben dadurch als centrisch dargestellten Theilung der Linie MN.

Hierher ist auch der Fall zu rechnen, wenn das Centrum V der Theilung zugleich das sphärische Centrum desjenigen Hauptkreises ist, wozu die Linie MN selbst gehört. Will man dann von dem Centrum V ein Loth auf MN fällen, um die Centrale zu construiren, so ist die Construction dieses Lothes völlig unbestimmt, weil dann alle Linien VN, VO, Vv, VM die Länge von 90° haben und auf MN senkrecht stehen. Als Centrale muß dann diejenige Vv unter ihnen genommen werden, wovon MN halbirt wird.

Nicht so sehr erwähnungswerth ist der Fall, in welchem die Centrale durch den einen Endpunkt M von MN geht. Die Proportion ist dann:

$$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m}{n \cos MN};$$

und wenn die Centrale durch N geht, so ist die Proportion:

$$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m \cos MN}{n}.$$

Im ersten Falle steht VM in M senkrecht auf MN und im zweiten Falle ist der Winkel N ein rechter.

§. 100.

Da nach §. 98 jedesmal, wenn das Centrum der Theilung V sich außerhalb der zu theilenden Linie MN befindet, statt desselben ein Centrum v in dieser Linie selbst genommen werden kann, welches der Durchschnittspunkt der Centralen und der Linie MN ist, so belohnt es die Mühe, die im §. 98 für das Centrum v erhaltene Proportion genauer in Betracht zu ziehen. Nehmen wir etwa an, daß dieses Centrum (Fig. 27) in der Verlängerung von MN liegt, um einen bestimmten Fall zum Grunde zu legen, und beziehen wir die beiden Endpunkte M und N der Linie MN sammt ihrem Theilpunkte O auf den Punkt v (das Centrum), so hat man für die Proportion:

$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m \cos vM}{n \cos vN}$ zu schreiben: $\frac{\sin (vO - vM)}{\sin (vN - vO)} = \frac{m . \cos vM}{n . \cos vN}$

und die Entwickelung gibt dann zunächst:

$$\frac{\operatorname{tng} vO - \operatorname{tng} vM}{\operatorname{tng} vN - \operatorname{tng} vO} = \frac{m}{n}.$$

Hieraus aber ergibt sich weiter der einfache Ausdruck

$$\text{tng}\, vO = \frac{m\,.\,\text{tng}\, vN + n\,.\,\text{tng}\, vM}{m+n}$$

für die durch den Punkt O aus dem Centrum v oder V hervorgebrachte centrische Theilung von MN.

Setzt man also: tng $vM = a$, tng $vN = a'$, tng $vO = x$, so ist die Formel:

$$x = \frac{ma' + na}{m+n}.$$

Wenn man aber statt der angegebenen Substitutionen die folgenden macht: tng $vM = a + k$, tng $vN = a' + k$ und tng $vO = x + k$, in welchen k eine willkürliche positive oder auch negative Größe bedeutet, so findet man gleichwohl wieder die Formel:

$$x = \frac{ma' + na}{m+n},$$

welche also von k völlig unabhängig ist. Daher darf man die drei Größen a, a', x um eine und dieselbe vierte k vermehren oder auch vermindern, ohne die centrische Theilung dadurch im mindesten zu ändern.

Geht die Centrale durch den Anfangspunkt M, so hat man: tng $MO = \frac{m.\text{tng}\, MN}{m+n}$; geht sie statt dessen durch den Anfangspunkt N, so hat man eben so: tng $NO = \frac{n}{m+n}$ tng MN.

Zusatz. Daher drücken denn die im §. 96 zum Grunde gelegten Formeln $x = \frac{na}{m+n}$ und $y = \frac{mb}{m+n}$ aus, daß die beiden Linien VM und VN von den Punkten P und Q (Fig. 25) centrisch aus V getheilt sind, und zwar VM nach dem Theilungsverhältnisse $\frac{n}{m}$, hingegen VN nach dem reciproken Verhältnisse $\frac{m}{n}$.

§. 101.

Wenn das Theilungsverhältniß $\frac{m}{n} = 1$ ist, so haben wir den besonderen Fall des centrischen Halbirens, und der Theilungspunkt O heißt dann die centrische Mitte von MN, welche man also von der (absoluten) Mitte dieser Linie unterscheiden wird.

Ist, z. B., in Fig. 27 der Punkt O die aus v bestimmte centrische Mitte von MN, so ist nicht MO = NO, sondern:

$$\operatorname{tng} vO = \frac{\operatorname{tng} vM + \operatorname{tng} vN}{2},$$

wofür auch die Proportion: $\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{\cos VM}{\cos VN}$ geschrieben werden kann.

Wenn in der Formel: $\operatorname{tng} vO' = \frac{m \operatorname{tng} vN + n \operatorname{tng} vM}{m + n}$,

$m = -n$ gesetzt wird, und also das Theilungsverhältniß $\frac{m}{n} = -1$

ist, so erhält man: $\operatorname{tng} vO = \frac{1}{o}$, oder $vO' = 90°$.

Der hierdurch bestimmte Theilpunkt O′ liegt also nicht immer, wie die centrische Mitte O von MN selbst zwischen M und N, sondern kann auch auf der Verlängerung von MN liegen und zwar immer um 90° von der Centrale vV der centrischen Theilung abstehend. Daher ist der Punkt O′ der sphärische Mittelpunkt des als Centrale dienenden Hauptkreises, und es geht also durch diesen Punkt O′ jedes auf der Centrale Vv errichtete Perpendikel VO′, oder anders ausgedrückt: Wenn man aus einem willkürlichen Punkte der Centrale Vv einen Hauptkreis beschreibt, so geht er immer durch den dem Theilungsverhältnisse $\frac{m}{n} = -1$ zugehörigen Theilungspunkt O′, der durch ihn also centrisch getheilten Linie MN.

Daher hat man denn weiter: $\cos vM = \sin MO'$ und $\cos vN = \sin NO'$, wodurch die im §. 98 für den Punkt O gefundene Proportion

$$\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m \cos vM}{n \cos vN}$$

übergeht in die folgende: $\frac{\sin MO}{\sin NO} = \frac{m \sin MO'}{n \sin NO'}$, oder auch:

$$\frac{\sin MO \,.\, \sin NO'}{\sin NO \,.\, \sin MO'} = \frac{m}{n}.$$

Diese Proportion läßt sich aber weiter umformen in:

$$\frac{\sin MO \,.\, \sin NO'}{m} = \frac{\sin NO \,.\, \sin MO'}{n} = \frac{\sin MN \,.\, \sin OO'}{m+n}.$$

In dem besonderen Falle, daß O die centrische Mitte von MN, ist also die Linie MONO′ in den vier Punkten M, O, N, O′ harmonisch getheilt. Durch den in diesen Proportionen vorkommenden Punkt O′ aber ist die Lage der Centralen Vv der centrischen

Theilung von MN bestimmt, weil, wie schon oben gesagt, der Punkt O′ das sphärische Centrum des als Centrale dienenden Hauptkreises Vv ist.

Zusatz. Wenn die Linie MN (Fig. 26) von der Centralen Vv zwischen M und N in v geschnitten wird, so hat man:
$\text{tng } vO = \frac{m \text{ tng } vN - n \text{ tng } vM}{m+n}$ und also für $m = n$ offenbar: $\text{tng } vO = \frac{\text{tng } vN - \text{tng } vM}{2}$; daher liegt auch nun die centrische Mitte O von MN, zwischen M und N; hingegen erhält man für $\frac{m}{n} = -1$, wie vorhin $\text{tng } vO' = \frac{1}{0}$ oder $vO' = 90°$.

§. 102.

Sphärisch-gerade Linien heißen concentrisch getheilt, wenn ihre centrischen Theilungen dasselbe Centrum haben, und sich also die zugehörigen Centralen in einem Punkte, dem gemeinschaftlichen Centrum, schneiden. Zwei centrisch getheilte Linien sind also immer concentrisch getheilt; anders verhält es sich offenbar, wenn mehr als zwei centrisch getheilte Linien gegeben sind.

Zu der möglichen Bedingung, daß gegebene Linien concentrisch getheilt seyn sollen, kann noch die hinzukommen, daß das Theilungsverhältniß $\frac{m}{n}$ bei allen diesen Theilungen dasselbe seyn soll. Um die Vereinbarkeit dieser Bedingungen nachzuweisen, sey in Fig. 28 die Linie AC von B centrisch aus ihrem Punkte P nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt, und also:

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{m \cos PA}{n \cos PC}.$$

Wird dann $PD = 90°$ genommen und werden von einem willkürlichen Punkte S aus die vier Linien SA, SB, SC, SD gezogen, welche von der Transversalen abcd in a, b, c, d geschnitten werden, so ist zunächst:

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{m \sin AD}{n \sin CD}.$$

Da nun aber

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin AS . \sin ASB}{\sin CS . \sin CSB} \text{ und } \frac{\sin AD}{\sin CD} = \frac{\sin AS . \sin ASD}{\sin CS . \sin CSD}$$

ist, so erhält man aus der vorigen Proportion offenbar die folgende:

$$\frac{\sin ASB}{\sin CSB} = \frac{m \sin ASD}{n \sin CSD}.$$

Dieselbe Winkelbeziehung muß aber auch durch die Theilung der Transversale abcd ausgedrückt seyn; daher hat man:

$$\frac{\sin ab}{\sin cb} = \frac{m . \sin ad}{n . \sin cd}.$$

Wird also dp = 90° genommen, so ist: $\frac{\sin ab}{\sin cb} = \frac{m \cos pa}{n \cos pc}$ und also die Linie ac aus p centrisch von b nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt. Werden nun weiter in P und p auf PAC und pac Perpendikel errichtet, welche sich in V schneiden, so sind die beiden Linien AC und ac von der Linie Bb concentrisch aus dem Centrum V nach demselben Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt; es sind PV und pV die beiden Centralen und V ist zugleich der sphärische Mittelpunkt des Hauptkreises DdS. Man übersieht hiernach leicht, daß auch mehr als zwei Linien concentrisch nach demselben Verhältnisse getheilt seyn können. Ferner können sich auch concentrisch getheilte Linien selbst in dem gemeinschaftlichen Centrum ihrer Theilung schneiden.

§. 103.

Wenn man aus dem Centrum V (Fig. 29) der nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ vom Punkte O bewirkten Theilung der Linie AB einen kleinen Kreis beschreibt, welcher von VA und VB in a und b; von VO in o und von der Centrale VC in c geschnitten wird, so ist:

$$\frac{\sin AO}{\sin BO} = \frac{\sin VA . \sin ao}{\sin VB . \sin bo};$$

und da nach der Annahme $\frac{\sin AO}{\sin BO} = \frac{m \cos AC}{n \cos BC} = \frac{m \cos VA}{n \cos VB}$ ist, so erhält man aus diesen beiden Proportionen die folgende:

$$\frac{\sin ao}{\sin bo} = \frac{m . \cot AV}{n . \cot BV}.$$

Es ist aber weiter: cot VA . tng VC = cos ac und cot VB . tng VC = cos bc; daher hat man dann weiter:

$$\frac{\sin ao}{\sin bo} = \frac{m . \cos ac}{n . \cos bc}$$

und diese Proportion drückt den Zusammenhang unter den Winkeln

aus, unter welchen die Linien VB, VO, VC, VA von dem Centrum V ausgehen.

Legt man daher durch sie eine zweite Linie B′O′C′A′, welche aber ebenfalls auf der Centrale VC senkrecht steht, so sind die Linien AB und A′B′ von den Punkten O und O′ nicht nur concentrisch aus V nach demselben Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt, sondern die beiden centrischen Theilungen haben außerdem noch dieselbe Centrale VC′C.

§. 104.

Das vorhin Gesagte mag zum Verständnisse des Wesens der centrischen und concentrischen Theilung hinreichen, und wir gehen daher jetzt dazu über, die sich auf diese Theilung beziehenden Formeln für die Zwecke der analytischen Sphärik brauchbar zu machen. Wir schicken daher als Einschaltung einen Satz voraus, welcher eigentlich zur Theorie der sphärisch-geraden Linie überhaupt gehört. Es sey Fig. 30 eine Linie MN bezogen auf die beiden Axen VX und VY, und also XY die Cardinale des Coordinaten-Systems. Die Gleichung an MN sey:

$$ax + by + c = o.$$

Fällen wir vom Anfangspunkte V das Loth Vv auf MN, und wird der Winkel vVX mit γ bezeichnet, so ist nach §. 9:

$$\text{tng}\,\gamma = \frac{b - a \cos v}{a \sin v},$$

wenn, wie daselbst, auch hier der Axenwinkel = v gesetzt wird.

Verlängern wir jetzt MN, bis die Cardinale XY davon in Z geschnitten wird, und ziehen wir nach dem Punkte Z vom Anfangspunkte V aus die Linie VZ. Da durch die Linie VZ die Lage des Punktes Z in der Cardinale XY bestimmt wird, so haben wir die Gleichung an VZ zu suchen aus der Gleichung $ax + by + c = o$.

Demgemäß bringen wir dieselbe unter die Form: $a + b.\frac{y}{x} + \frac{c}{x} = o$, um in ihr $x = \frac{1}{o}$ und $A = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ zu setzen, indem wir den Winkel XVZ = α und YVZ = β setzen. Dadurch erhalten wir:

$$A = -\frac{a}{b},$$

und weil $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = A$, also $\text{tng}\,\alpha = \frac{A \sin v}{1 + A \cos v}$ (nach §. 7) ist, so finden wir: $\text{tng}\,\alpha = \frac{-a \sin v}{b - a \cos v}$, und also:

$$\text{tng}\,\alpha . \text{tng}\,\gamma = -1;$$

d. h., die beiden Linien VZ und Vv schließen an V einen rechten Winkel ein, und da auch der Winkel VvZ = 90° ist, so ist das Dreieck VvZ gleichschenkelig, und insbesondere ZV = Zv = 90°.

Nehmen wir daher an, daß die Linie MN centrisch aus V in O nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt sey, und bringen wir mit dem so eben bewiesenen Satze den im §. 101 gefundenen in Verbindung, so haben wir offenbar die folgende Proportion:

$$\frac{\sin MO . \sin ZN}{\sin NO . \sin ZM} = \frac{m}{n},$$

oder wenn wir die Linie MN centrisch aus V nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n} = -1$ theilen, so ist der Theilpunkt Z der Durchschnittspunkt der Linie MN mit der Cardinale XY, wie im §. 101 auf andere Art dargethan wurde.

§. 105.

Wenn die Endpunkte einer centrisch getheilten Linie MN durch ihre Axen-Coordinaten bestimmt sind, und das Theilungsverhältniß $\frac{m}{n}$ gegeben ist, so lassen sich hieraus auf eine einfache Weise die Axen-Coordinaten des Theilpunktes O für willkürliche Richtungen der beiden Coordinaten-Axen herleiten, jedoch unter der Voraussetzung, daß der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems in der Centrale der centrischen Theilung liegt.

Es sey Fig. 30 die Linie MN centrisch von O nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilt, und Vv sey die Centrale. In ihr wählen wir willkürlich den Anfangspunkt V, und ziehen unter beliebigen Winkeln mit der Centrale Vv die Coordinaten-Axen VX und VY, in Beziehung auf welche die beiden Endpunkte M und N der zu theilenden Linie MN bestimmt seyen, wie folgt:

$$M = (a, b) \text{ und } N = (a', b').$$

Der Theilungspunkt O sey eben so bezeichnet: O = (x, y).

Legt man zwei andere Coordinaten-Axen VX' und VY' durch die Endpunkte von MN, und wird der Punkt O in Beziehung auf sie bezeichnet mit (x', y'), so ist: $x' = \operatorname{tng} VP$ und $y' = \operatorname{tng} VQ$. Ferner sey $\operatorname{tng} VM = A$ und $\operatorname{tng} VN = B$. In Beziehung auf die letzt genannten Axen ist dann noch:

$$M = (A, o) \text{ und } N = (o, B).$$

Die Coordinaten dieses Systems lassen sich durch die des vorigen nach §. 18 ausdrücken, und die Ausdrücke haben die Form:

1) $x' = P.x - Q.y$,
2) $y' = R.y - S.x$.

Ganz ebenso hat man für den Punkt M die Gleichungen:

3) $A = P.a - Q.b$,
4) $o = R.b - S.a$;

und für den Punkt N die beiden folgenden:

5) $o = P.a' - Q.b'$,
6) $B = R.b' - S.a'$.

Da nun aber nach §. 96 ist:

$$\frac{x'}{A} = \frac{n}{m+n} \text{ und } \frac{y'}{B} = \frac{m}{m+n}$$

so hat man die beiden Gleichungen:

$$\frac{P.x - Q.y}{P.a - Q.b} = \frac{n}{m+n},$$

$$\frac{R.y - S.x}{R.b' - S.a'} = \frac{m}{m+n}.$$

Werden darin die aus den Gleichungen (4) und (6) gezogenen Werthe: $R = S.\frac{a}{b}$ und $P = Q.\frac{b'}{a'}$ substituirt, so verwandeln sie sich in:

$$\frac{b'x - a'y}{b'a - ab'} = \frac{n}{m+n} \text{ und } \frac{ay - bx}{ab' - ba'} = \frac{m}{m+n};$$

und ihre Auflösung gibt daher die beiden gesuchten einfachen Ausdrücke:

$$x = \frac{ma' + ma}{m+n} \text{ und } y = \frac{mb' + nb}{m+n},$$

welche, wie man sieht, von den Richtungen der beiden Coordinaten-Axen VX und VY völlig unabhängig sind. Ganz dieselben Formeln findet man im analogen Falle der Planimetrie.

Soll also O die centrische Mitte von MN seyn, so hat man: $\frac{m}{n} = +1$ und also dann:

$$x = \frac{a + a'}{2} \text{ und } y = \frac{b + b'}{2}.$$

§. 106.

Wenn man also in Fig. 31 die beiden Linien M'N' und M''N'' concentrisch aus ihrem Durchschnittspunkte V durch die beiden Punkte O' und O'' nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ theilt, so nämlich, daß ist:

$$\frac{\sin M'O'}{\sin N'O'} = \frac{m.\cos VM'}{n.\cos VN'} \text{ oder auch: } \operatorname{tng} VO' = \frac{m \operatorname{tng} VN' + n.\operatorname{tng} VM'}{m+n}$$

und

$\frac{\sin M''O''}{\sin N''O''}=\frac{m.\cos VM''}{n.\cos VN''}$ oder auch: $\operatorname{tng} VO''=\frac{m \operatorname{tng} VN''+n \operatorname{tng} VM''}{m+n}$

so sind VM' und VM'' die Axen-Coordinaten eines Punktes M; eben so VN' und VN'' die Axen-Coordinaten eines Punktes N, endlich VO' und VO'' die Axen-Coordinaten eines Punktes O und es liegen die drei Punkte M, N, O in einer sphärisch-geraden Linie MN, welche vom dritten Puncte O concentrisch mit den beiden vorigen Linien aus dem gemeinschaftlichen Centrum V getheilt ist, so nämlich, daß, wenn Vv senkrecht auf MN (die Centrale) ist:

$$\frac{\sin MO}{\sin NO}=\frac{m . \cos vM}{n . \cos vN}$$

ist, oder wenn umgekehrt der Punkt v durch diese Proportion bestimmt wird, so steht Vv senkrecht auf MN.

Hiermit aber haben wir auf eine eben so einfache, als allgemeine Weise die Bedingung ausgesprochen, unter welcher drei Punkte in einer sphärisch-geraden Linie liegen und es ist zugleich die Lage des dritten Punktes in dieser Linie bestimmt angegeben worden.

Man kann die Centrale Vv nach §. 104 auch dadurch finden, daß man die Linie MN verlängert, bis die Cardinale XY davon in einem Punkte Z geschnitten wird, wenn dann $Zv=90°$ genommen wird, so ist Vv die gesuchte Cardinale und also senkrecht auf MN.

§. 107.

So einfach die im §. 105 erhaltenen allgemeinen Formeln sind, und so sehr sie mit bekannten planimetrischen übereinstimmen, so zusammengesetzt werden sie, wenn man die im §. 105 gemachte Voraussetzung aufhebt, welcher gemäß der Anfangspunkt der Coordinaten in der Centralen der centrischen Theilung selbst, obgleich in ihr an einer willkürlichen Stelle, angenommen wurde. Um nun die Aufgabe aber in größerer Allgemeinheit aufzulösen, betrachten wir zuvor Fig. 32 die centrisch aus V im Punkte O nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ getheilte Linie MN.

Wir haben zunächst:

$$\operatorname{tng} VO=\frac{m \operatorname{tng} VN+n \operatorname{tng} VM}{m+n}.$$

Nehmen wir nun in dieser Linie willkürlich einen Punkt W an, und addiren wir zur vorigen Gleichung die Identität:

$$\operatorname{tng} WV=\frac{m \operatorname{tng} WV+n \operatorname{tng} WV}{m+n},$$

so erhalten wir zunächst:

$$(m+n) \cdot \frac{\sin WO}{\cos VO} = m \cdot \frac{\sin WN}{\cos VN} + n \cdot \frac{\sin WM}{\cos VM},$$

und diese Gleichung läßt sich noch weiter umformen in die folgende:

$$\frac{(m+n) \operatorname{tng} WO}{1+\operatorname{tng} WO . \operatorname{tng} WV} = \frac{m \operatorname{tng} WN}{1+\operatorname{tng} WN . \operatorname{tng} WV} + \frac{n \operatorname{tng} WM}{1+\operatorname{tng} WM . \operatorname{tng} WV},$$

oder auch:

$$\frac{m+n}{\cot WO + \operatorname{tng} WV} = \frac{m}{\cot WN + \operatorname{tng} WV} + \frac{n}{\cot WM + \operatorname{tng} WV}.$$

Die weitere Entwickelung führt dann endlich zu der Formel:

$$\operatorname{tng} WO = \frac{m \operatorname{tng} WN\ (1+\operatorname{tng} WM . \operatorname{tng} WV) + n \operatorname{tng} WM (1+\operatorname{tng} WN . \operatorname{tng} WV)}{m(1+\operatorname{tng} WM . \operatorname{tng} WV) + n(1+\operatorname{tng} WN . \operatorname{tng} WV)}.$$

Setzen wir also $\operatorname{tng} WV = \alpha$, $\operatorname{tng} WM = a$, $\operatorname{tng} WN = a'$, $\operatorname{tng} WO = x$, so ist:

$$x = \frac{ma'\ (1+a\alpha) + na\ (1+a'\alpha)}{m\ (1+a\alpha) + n\ (1+a'\alpha)},$$

und diese Formel zieht sich, wenn $\alpha = o$ ist, offenbar wieder zusammen auf:

$$x = \frac{ma' + na}{m+n}.$$

§. 108.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ohne lange arithmetische Entwickelungen in größter Allgemeinheit die Aufgabe auflösen, aus den Coordinaten der Endpunkte einer Linie, aus dem gegebenen Theilungsverhältnisse $\frac{m}{n}$ und den Coordinaten eines Centrums die Coordinaten des Theilungspunktes O selbst zu finden.

Es sey Fig. 33 das Centrum der Theilung $V = (-a, -b)$, und also $\operatorname{tng} WP = b$, $\operatorname{tng} WQ = a$; die zu theilende Linie sey MN, der Endpunkt $M = (A, B)$; der Endpunkt $N = (A', B')$; der gesuchte Theilpunkt sey $O = (X, Y)$ und der Axenwinkel sey $XWY = w$. Es ist dann die Gleichung an einen Hauptkreis, dessen sphärisches Centrum der Punkt V ist, nach §. 6:

$$(a + b \cos w) . x + (b + a \cos w) . y = 1,$$

und die Gleichung an die Linie MN selbst ist:

$$(B' - B) . x + (A - A') . y = B'A - BA'.$$

Diese beiden Hauptkreise mögen sich im Punkte R schneiden, und zur Bestimmung dieses Punktes findet man:

$$x' = \frac{(AB' - BA')\ (b + a \cos w) + (A' - A)}{(B' - B)\ (b + a \cos w) + (A' - A)\ (a + b \cos w)},$$

$$y' = \frac{-(AB' - BA')(a + b \cos w) + (B' - B)}{(B' - B)(b + a \cos w) + (A' - A)\ (a + b \cos w)}.$$

In Benutzung dieses Punktes R ist der Ausdruck der centrischen Theilung nach §. 101:

$$\frac{\sin MO \cdot \sin RN}{\sin NO \cdot \sin RM} = \frac{m}{n};$$

und wird aus R als Mittelpunkt ein Hauptkreis beschrieben, so geht er durch V, steht senkrecht auf RM und ist also die Centrale der Theilung.

Werden nun die Linien YM, YO, YN, YR gezogen, wovon die Axe WX in M′, O′, N′, R′ geschnitten werden mag, so ist $\tan WM' = A$, $\tan WO' = X$, $\tan WN' = A'$, $\tan WR' = x'$, und es ist außerdem noch (nach §. 102):

$$\frac{\sin M'O' \cdot \sin R'N'}{\sin N'O' \cdot \sin R'M'} = \frac{m}{n}.$$

Wird also in der Linie WM′O′N′R′X das Stück WV′ = R′X abgeschnitten, so ist: V′R′ = 90°, und also V′ das Centrum für die centrische Theilung der Linie M′N′, oder:

$$\frac{\sin M'O'}{\sin N'O'} = \frac{m \cdot \cos V'M}{n \cdot \cos V'N}.$$

Setzen wir nun WV′ = arc ($\tan = \alpha$), so ist: $\alpha = \frac{1}{x'}$; und da nach §. 107 ist:

$$X = \frac{mA'(1 - A\alpha) + nA(1 - A'\alpha)}{m(1 - A\alpha) + n(1 - A'\alpha)},$$

so hat man in diesem Ausdrucke nur noch für α den folgenden Werth zu substituiren:

$$\alpha = \frac{(B' - B)(b + a \cos w) + (A' - A)(a + b \cos w)}{(AB' - BA')(b + a \cos w) - (A' - A)},$$

oder auch, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$b' = b + a \cos w,$$
$$a' = a + b \cos w,$$

den folgenden: $\alpha = \frac{(B' - B)\, b' + (A' - A)\, a'}{(AB' - BA')\, b' + A' - A}$.

Dadurch erhält man aber: $1 - A \cdot \alpha = \frac{(A' - A)(1 - Aa' - Bb')}{(AB' - BA')\, b' + A' - A}$,

und $1 - A' \cdot \alpha = \frac{(A' - A)(1 - A'a' - B'b')}{(AB' - BA')\, b' + (A' - A)}$,

und die Benutzung dieser Werthe gibt:

$$X = \frac{mA'(1 - Aa' - Bb') + nA(1 - A'a' - B'b')}{m(1 - Aa' - Bb') + n(1 - A'a' - B'b')}.$$

Bezeichnet man daher den Punkt V oder das Centrum der Theilung nicht, wie vorher, mit (—a, — b), sondern mit

$$V = (a, b)$$

während die übrige Bezeichnung dieselbe bleibt, wie vorhin, so hat man:

$$X = \frac{mA'(1 + Aa' + Bb') + nA(1 + A'a' + B'b')}{m(1 + Aa' + Bb') + n(1 + A'a' + B'b')},$$ und ebenso:

$$Y = \frac{mB'(1 + Aa' + Bb') + nB(1 + A'a' + B'b')}{m(1 + Aa' + Bb') + n(1 + A'a' + B'b')};$$

und durch diese beiden Formeln ist die vorgelegte Aufgabe in ihrem ganzen Umfange gelöset worden, da nun auch das Centrum $V = (a, b)$ der Theilung eine willkürliche Stellung haben kann. Ist der Axenwinkel $w = 90°$, so ziehen sich die beiden Formeln zusammen auf:

$$X = \frac{mA'(1 + Aa + Bb) + nA(1 + A'a + B'b)}{m(1 + Aa + Bb) + n(1 + A'a + B'b)},$$

$$Y = \frac{mB'(1 + Aa + Bb) + nB(1 + A'a + B'b)}{m(1 + Aa + Bb) + n(1 + A'a + B'b)}$$

Zahllose Folgerungen und Anwendungen gestatten diese allgemeinen Formeln, welche als **Fundamentalformeln** zu betrachten sind, worauf wir jedoch hier nicht eingehen. Denn wie auch die Werthe von m, n, a, b verändert werden mögen, so liegt der Punkt (X, Y) gleichwohl immer in der durch die beiden festen oder gegebenen Punkte (A, B) und (A', B') gehenden sphärisch-geraden Linie MN, welche er eben centrisch aus (a, b) nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ theilt.

§. 109.

In Anwendung des Begriffes der centrischen Theilung und insbesondere der centrischen Halbirung können wir noch eine Eigenschaft des sphärischen Coordinaten-Systems auf eine überaus einfache Weise darthun. Wenn Fig. 34 aus den Cardinalpunkten X und Y die Linien XQ und XQ'; YP und YP', gezogen werden, welche sich in A, B, C, D schneiden, und wir $\text{tng}\, VP = a$, $\text{tng}\, VP' = a'$, $\text{tng}\, VQ = b$, $\text{tng}\, VQ' = b'$ setzen, so ist $x = a$ die Gleichung an AD; $x = a'$ die Gleichung an BC; $y = b$ die Gleichung an AB und $x = b'$ die Gleichung an CD.

Ziehen wir nun im Vierecke ABCD die beiden Diagonalen, und nehmen wir den Anfangspunkt V an zum Centrum der Halbirung, so haben wir:

$$A = (a, b);\ B = (a', b);\ C = (a', b');\ D = (a, b').$$

Bezeichnen wir die centrische Mitte der Diagonale AC mit (x, y) und der Diagonale BD mit (x', y'), so haben wir nach §. 105:

$$x = \frac{a + a'}{2} \text{ und } y = \frac{b + b'}{2},$$

$$x' = \frac{a' + a}{2} \text{ und } y' = \frac{b + b'}{2}.$$

Daher ist $x = x'$ und $y = y'$, d. h.: die beiden Diagonalen AC und BD halbiren einander centrisch aus V, und man kann daher das Viereck ABCD der Analogie wegen ein centrisches Parallelogramm nennen und zwar für das Centrum V.

Werden ferner durch den Durchschnittspunkt E der beiden Diagonalen die Linien XEq und YEp gezogen, so ist:

$$x = x' = \text{tng } Vp = \frac{\text{tng } VP + \text{tng } VP'}{2} \text{ und}$$

$$y = y' = \text{tng } Vq = \frac{\text{tng } VQ + \text{tng } VQ'}{2}.$$

Weiter werden von der Linie Xq die Seiten AD und BC centrisch aus V halbirt, und eben so werden auch von der Linie Yp die beiden anderen Gegenseiten AB und BC des centrischen Parallelogrammes aus V halbirt.

§. 110.

Das so eben bewiesene Theorem ist nur ein sehr specieller Fall von einem viel allgemeineren. Es sey Fig. 35 ABCDEF ein sogenanntes vollständiges Viereck, welches die drei Diagonalen AD, BC und FE hat. Wir halbiren die beiden ersten Diagonalen centrisch aus einem Punkte V, welcher eine willkürliche Lage haben mag, und suchen eine Gleichung an die centrische Halbirungslinie. Um ohne lange Entwickelungen dahin zu gelangen, beschreiben wir aus V einen Hauptkreis, wovon die Seiten AB und AC des Vierecks in X und Y geschnitten werden, und nehmen das Stück XY desselben zur Cardinale, also das gegebene Centrum V selbst zum Anfangspunkt der Coordinaten. Wird nun der Punkt A bestimmt durch (a, α) so ist die Gleichung an AB: $y - \alpha = o$, und die Gleichung an AC ist eben so: $x - a = o$.

Es sey ferner $B = (b, \alpha)$; $C = (a, \gamma)$ und $D = (d, \delta)$; dann ist die Gleichung an BD:

$$(\delta - \alpha)\, x - (d - b)\, y = \delta b - \alpha d;$$

und wird sie mit der Gleichung $x - a = o$ verbunden, so erhält man zur Bestimmung des Punktes E die Ausdrücke:

$$x = a \text{ und } y = \frac{\alpha\,(d - a) - \delta\,(b - a)}{d - b}.$$

Die Gleichung an CD ist eben so:

$$(\delta-\gamma)\,x-(d-a)\,y=\delta a-\gamma d,$$

und wird sie mit der Gleichung $y=\alpha$ verbunden, so erhält man zur Bestimmung der Lage von F die Ausdrücke:

$$x=\frac{a\,(\delta-\alpha)-d\,(\gamma-\alpha)}{\delta-\gamma}\text{, und } y=\alpha.$$

Werden nun die beiden Diagonalen AD und BC centrisch aus V halbirt, so ist nach §. 105 die centrische Mitte von AD bestimmt durch:

$$x=\frac{a+d}{2}\text{ und } y=\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Eben so ist die centrische Mitte von BC bestimmt durch:

$$x=\frac{a+b}{2}\text{ und } y=\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Daher ist die Gleichung an den durch die centrischen Mitten von AD und BC gehenden Hauptkreis:

$$\frac{\delta-\gamma}{2}\cdot x-\frac{d-b}{2}\cdot y=\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(\frac{a+d}{2}\right)\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

oder einfacher:

$$2\,(\delta-\gamma)\,x-2\,(d-b)\,y=a\,(\delta-\gamma)+\alpha\,(b-d)+b\delta-d\gamma.$$

Diese Gleichung läßt sich auch unter folgende Form bringen:

$$2\,(\delta-\gamma)\,.\,(x-a)-2\,(d-b)\,.\,(y-\alpha)=b\delta-d\gamma-a\,(\delta-\gamma)-\alpha(b-d).$$

Nimmt man nun noch die centrische Mitte der dritten Diagonale EF, so hat man für sie die Ausdrücke:

$$2x=a+\frac{a\,(\delta-\alpha)-d\,(\gamma-\alpha)}{\delta-\gamma},$$

$$2y=\alpha+\frac{\alpha\,(d-a)-\delta\,(b-a)}{d-b}.$$

Hieraus aber zieht man die beiden Formeln:

$$2\,(\delta-\gamma)\,(x-a)=a\gamma-a\alpha+d\alpha-d\gamma,$$

$$2\,(d-b)\,(y-\alpha)=-\alpha a-\delta b+\delta a+\alpha b,$$

und wird von der ersten die zweite subtrahirt, so erhält man:

$$2\,(\delta-\gamma)\,(x-a)-2\,(d-b)(y-\alpha)=b\delta-d\gamma-a\,(\delta-\gamma)-\alpha(b-d);$$

und also dieselbe Gleichung, welche früher für den Hauptkreis gefunden wurde, wovon die beiden Diagonalen AD und BC centrisch halbirt werden.

Wenn man daher aus einem willkürlichen Centrum V die drei Diagonalen AD, BC und EF eines vollständigen Vierecks halbirt, so liegen diese drei centrischen Mitten jedesmal in einem und demselben Hauptkreise, dessen Lage sich aber ändern kann, wenn das gemeinschaftliche Centrum V seine Stelle verändert.

Wenn man ferner die drei Diagonalen, statt sie nach dem

Verhältnisse $\frac{m}{n} = +1$ zu theilen oder zu halbiren, vielmehr nach dem Verhältnisse $\frac{m}{n} = -1$ theilt, so liegen die drei concentrischen Theilpunkte nach §. 101 so, daß sie von dem gemeinschaftlichen Centrum V um 90° abstehen; d. h., diese drei Punkte sind gerade diejenigen, in welchen die drei Diagonalen von der Cardinale XY geschnitten werden. — Daher liegen auch diese drei Theilpunkte in einem und demselben Hauptkreise.

In jeder Diagonale liegen also außer ihren beiden Endpunkten zwei centrische Theilpunkte, und in diesen vier Punkten ist eine solche Diagonale nach §. 101 jedesmal harmonisch getheilt.

§. 111.

Wir behalten das vorige Coordinaten-System und auch die vorige Bezeichnung bei und beschreiben einen sphärischen Kegelschnitt, welcher die vier Seiten des Vierecks ABCD berühren soll, und dessen Gleichung seyn mag:

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o.$$

Insofern er nun die Seite AB berühren soll, deren Gleichung ist: $y - \alpha = o$, haben wir nach §. 52 die Bedingung:

1) $(B^2 - AC).\alpha^2 + 2\alpha(BE - CD) + E^2 - CG = o.$

Insofern er nun die Seite AC berührt, deren Gleichung $x - a = o$ ist, haben wir:

2) $(B^2 - AC).a^2 + 2a(BD - AE) + D^2 - AG = o.$

Da die Gleichung für CD ist: $(\delta - \gamma).x - (d - a)y = \delta a - \gamma d$, haben wir:

3) $(B^2 - AC)(\delta a - \gamma d)^2 + 2(BD - AE)\,\delta - \gamma\,(\delta a - \gamma d)$
$+ (D^2 - AG)(\delta - \gamma)^2 + 2(BG - DE)(\delta - \gamma)(a - d)$
$+ 2(BE - CD)(a - d)(\delta a - \gamma d) + (E^2 - CG)(d - a)^2 = o.$

Die vierte Bedingung, der Berührung der Seite BD, deren Gleichung $(\delta - \alpha)x - (d - b)\,y = \delta b - \alpha d$ ist:

4) $(B^2 - AC)(\delta b - \alpha d)^2 + 2(BD - AE)(\delta - \alpha)(\delta b - \alpha d)$
$+ (D^2 - AG)(\delta - \alpha)^2 + 2(BG - DE)(\delta - \alpha)(b - d)$
$+ 2(BE - CD)(b - d)(\delta b - \alpha d) + (E^2 - CG)(d - b)^2 = o.$

Eliminiren wir aus den vier Bedingungsgleichungen die drei Größen $E^2 - CG$, $D^2 - AG$ und $BG - DE$, so erhalten wir eine einzige Gleichung, in welcher wir:

$$x = \frac{AE - BD}{B^2 - AC} \text{ und } y = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}$$

setzen, und die dann ist:

$$\frac{(\delta a-\gamma d)^2-a^2(\delta-\gamma)^2-\alpha^2(d-a)^2}{(\delta-\gamma)\,(a-d)}-2\gamma.x-2y.\left(\frac{\delta a-\gamma d-\alpha a+\alpha d}{\delta-\gamma}\right)$$
$$=\frac{(\delta b-\alpha d)^2-a^2(\delta-\alpha)^2-\alpha^2(d-b)^2}{(\delta-\alpha)\,(b-d)}-2b.y-2x.\left(\frac{\delta b-\alpha d-a\delta+a\alpha}{b-d}\right).$$

Der Punkt (x, y) aber ist nach §. 38 der in Beziehung auf einen Kegelschnitt bestimmte Pol der Cardinalen XY, welcher mit P bezeichnet seyn mag; dieser Pol ändert mit dem Kegelschnitte zugleich, wozu er gehört, und der die vier Seiten des Vierecks ABDC berührt, seine Lage — aber wie er auch seine Lage ändern mag, so bleibt er gleichwohl immer in einem und demselben Hauptkreise, weil die vorstehende Gleichung an den geometrischen Ort des Punktes P eine Gleichung des ersten Grades ist, und also einem Hauptkreise zugehört.

Die gefundene Gleichung läßt sich aber noch sehr reduciren und man findet dadurch bald:

$$2(b-d)y+2(\delta-\gamma).x=\frac{(2\gamma a-2\alpha b)(\delta-\gamma)(b-d)+(\gamma^2-\alpha^2)(a-d)(b-d)+(a^2-b^2)(\delta-\alpha)(\delta-\gamma)}{\delta a-\gamma d-\alpha a+\alpha d-\delta b+\gamma b}.$$

Im Ausdrucke auf der rechten Seite ist aber der Zähler theilbar durch den Nenner und nach geschehener Division hat man die einfachere Gleichung:

$$2(b-d).y+2(\delta-\gamma)x=a(\delta-\gamma)+\alpha(b-d)+b\delta-d\gamma$$

und also dieselbe, welche im §. 110 gefunden wurde.

Wenn daher in Beziehung auf jeden Kegelschnitt, welcher die vier Seiten des Vierecks ABCD halbirt, der Pol P der Cardinalen XY bestimmt wird, so befindet er sich jedesmal in einem zweiten Hauptkreise, welcher die drei Diagonalen concentrisch aus V halbirt, wenn V das sphärische Centrum des willkürlich beschriebenen Hauptkreises XY ist.

Wir können hiermit noch das im Zusatze 1 zu §. 59 bewiesene Theorem in Verbindung setzen, und demgemäß aus dem Punkte P, als einem sphärischen Centrum einen Hauptkreis beschreiben. Gehört nun zu dem Kegelschnitte K, in Beziehung auf welchen der Pol P bestimmt worden ist, die reciproke Curve K' und wird in Beziehung auf sie ein Pol P' bestimmt, welcher den aus P beschriebenen Hauptkreis zur Polaren hat, so fällt der Pol P' jedesmal mit dem Punkte V zusammmen.

§. 112.

Es gehört in diesen Abschnitt auch die Discussion der Gleichung:

$$(y-b)^2+2(y-b)\,(x-b)\cos v+(x-a)^2=r^2,$$

in welcher (x, y) einen Punkt M der Curve, (a, b) einen unveränderlichen Punkt R, und r eine Constante bezeichnet; v sey der Axenwinkel. In der Planimetrie gehört diese Gleichung bekanntlich einem Kreise, dessen Radius $= r$ und dessen Mittelpunkt der Punkt R oder (a, b) ist. Wir nennen die dieser Gleichung in der Sphärik zugehörige Curve eben deßwegen einen centrischen Kreis, und zwar für den Anfangspunkt V; denn die Gleichung an einen wirklichen Kreis, bezogen auf zwei sich unter dem Winkel v schneidende Axen, ist in der Sphärik von anderer Beschaffenheit.

Da die beiden Coordinaten-Axen eine unbestimmte Richtung haben, so nehmen wir eine Coordinaten-Verwandlung vor, wobei wir außer dem Anfangspunkte V auch die Richtung der zweiten Axe unverändert beibehalten, und nur die Richtung der ersten Axe um einen Winkel α verändern.

Wird der Punkt M in Beziehung auf das neue Coordinaten-System mit (x′, y′) und eben so der Punkt R mit (a′, b′) bezeichnet, so ist der neue Coordinaten-Winkel $= v - \alpha = v'$, und daher nach §. 18:

$$x = \frac{x' \sin v'}{\sin v}, \qquad a = \frac{a' \sin v'}{\sin v},$$

$$y = \frac{y' \sin v + x' \sin (v - v')}{\sin v}, \qquad b = \frac{b' \sin v + a' \sin (v - v')}{\sin v}.$$

Werden diese Werthe in der vorgelegten Gleichung substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction die neue Gleichung:

$$(y' - b')^2 + 2(y' - b')(x' - a') \cos v' + (x' - a')^2 = r^2,$$

welche, wie man sieht, die Beschaffenheit der vorigen hat, und insbesondere dieselbe Constante r, wie vorhin, enthält.

Was aber hier von der ersten Axe bewiesen ist, gilt offenbar auch von der zweiten. Man hätte also offenbar die Richtungen beider Axen zugleich um willkürliche Winkel verlegen können, und es wäre, wenn nur der Anfangspunkt V beibehalten wird, dieselbe Gleichung hervorgegangen.

§. 113.

Durch Entwickelung geht die neue Gleichung, indem wir die Accente von x′ und y′ weglassen, über in:

$$y^2 + 2 \cos v'.xy + x^2 - 2(b' + a' \cos v').y - 2(a' + b' \cos v').x$$
$$+ a'^2 + 2 a'b' \cos v' + b'^2 - r^2 = o.$$

Nehmen wir nun den Winkel α im §. 112 so an, daß die erste Axe von der Curve in zwei Punkten N und N′ geschnitten wird, und setzen wir:

$$\text{tng } VN = n, \quad \text{tng } VN' = n',$$

so erhalten wir, indem wir in der Gleichung an die Curve setzen $y = o$,

die Gleichung: $x^2-2(a'+b'\cos v).x+a'^2+2a'b'\cos v'+b'^2-r^2=o$, deren Wurzeln die Größen n und n' sind. Daher hat man denn:

$$n+n'=2(a'+b'\cos v')$$

$$\text{und } n.n'=a'^2+2a'b'\cos v'+b'^2-r^2.$$

Die letzte Gleichung formen wir noch um, indem wir den festen Punkt R mit dem Anfangspunkte V durch eine Linie VR verbinden und

$$\text{tng } VR=\varrho$$

setzen; denn nach §. 4 ist offenbar:

$$a'^2+2a'b'\cos v'+b'^2=\varrho^2,$$

und also ebenfalls eine constante Größe; daher ist denn das Produkt

$$n.n'=\varrho^2-r^2=(\varrho-r)(\varrho+r)$$

ebenfalls von constanter Größe, welchen Werth auch der Winkel α haben mag, unter welchem die Sekante (oder Sehne) VNN durch die Curve gelegt wird.

Wenn daher, wie in Fig. 36, der Punkt V sich außerhalb des Kegelschnitts PCQD befindet und von ihm aus unter willkürlichen Richtungen die beiden Sekanten VMM' und VNN' gezogen werden, so ist immer:

$$\text{tng } VM.\text{tng } VM'=\text{tng } VN.\text{tng } VN'.$$

Drehen sich die Sekanten um V so lange, bis sie die Tangenten VQ und VP abgeben, so ist eben so: $\text{tng } VQ^2=\text{tng } VP^2$, und also auch:

$$VQ=VP;$$

d. h., der Punkt V hat eine solche Lage, daß die beiden von ihm aus an die Curve gelegten Tangenten VP und VQ gleich groß sind. Wird also die Berührungssehne PQ gezogen, so ist PVQ ein gleichschenkeliges Dreieck.

§. 114.

Da der Punkt V der Anfangspunkt ist, so ist nach §. 55 die Gleichung an die ihm zugehörige Polare:

$$(b'+a'\cos v').y+(a'+b'\cos v')x=b'^2+2a'b'\cos v'+a'^2-r^2,$$

oder auch: $Ax+By=\varrho^2-r^2$, wenn wir zur Vereinfachung setzen:

$$A=a'+b'\cos v' \text{ und } B=b'+a'\cos v'.$$

Fällen wir aber vom Anfangspunkte V ein Loth auf sie, so ist die Gleichung an dieses Perpendikel nach §. 9:

$$y=\frac{B-A\cos v'}{A-B\cos v'}.x;$$

und wenn hierin für A und B die Werthe substituirt werden, so reduzirt sich die Gleichung auf:

$$y = \frac{b'}{a'} \cdot x;$$

d. h., wenn man den Anfangspunkt V mit dem gegebenen festen Punkte R durch eine Linie $VR = \varrho$ verbindet, so steht diese senkrecht auf der Berührungssehne PQ, welche also davon halbirt wird (in S).

Die Gleichung an einen durch R selbst gehenden Hauptkreis, welcher ebenfalls auf VCSRD senkrecht steht, ist nach §. 12:
$(b'+a'\cos v').y+(a'+b'\cos v')x=b'(b'+a'\cos v)+a'(a'+b'\cos v)$
oder $(b'+a'\cos v').y+(a'+b'\cos v').x=b'^2+2a'b'\cos v'+a'^2$.

§. 115.

Um den Abstand VS der Mitte S der Berührungssehne PQ vom Anfangspunkte V zu finden, bedenkt man, daß VCSD harmonisch getheilt und also $2.\cot VS = \cot VC + \cot VD$ ist.

Diesem gemäß kommt es also auf die Ermittelung der Ausdrücke für VC und VD an. Geben wir aber dem Winkel α im §. 112 die Größe, daß die erste Axe durch R geht, so ist: $\operatorname{tng} VC = n$ und $\operatorname{tng} VD = n'$. Da aber $b' = o$ seyn soll, und dann $\operatorname{tng} VR = a'$ ist, so haben wir:

$$n + n' = 2a' = 2\varrho$$

$$\text{und } n.n' = a'^2 - r^2 = \varrho^2 - r^2.$$

Der ersten Gleichung $\frac{n+n'}{2} = \varrho$ gemäß, ist CD vom Punkte R centrisch aus V halbirt. Aus den beiden Gleichungen findet man aber:

$$n' - n = 2r,$$

$$\text{und also: } n' = \varrho + r = \operatorname{tng} VD,$$

$$n = \varrho - r = \operatorname{tng} VC.$$

Daher ist denn: $2 \cot VS = \frac{1}{\varrho + r} + \frac{1}{\varrho - r} = \frac{2\varrho}{\varrho^2 - r^2}$, und also:

$$\operatorname{tng} VS = \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho};$$

$$\text{aber: } \operatorname{tng} VR = \varrho;$$

$$\text{also ist: } \operatorname{tng} VR - \operatorname{tng} VS = \frac{r^2}{\varrho}$$

$$\text{und } 1 + \operatorname{tng} VS \operatorname{tng} VR = 1 + \varrho^2 - r^2,$$

$$\text{mithin: } \operatorname{tng} SR = \frac{r^2}{\varrho\,(1 + \varrho^2 - r^2)}.$$

Sind ferner VX und VY die ursprünglichen Coordinaten-Axen, in Beziehung auf welche der Punkt R durch (a, b) im §. 112 bestimmt war, so finden wir leicht:

$$\text{tng}\ \alpha = \text{tng XVR} = \frac{b \sin v}{a + b \cos v}$$

$$\text{und tng}\ v' = \text{tng YVR} = \frac{a \sin v}{b + a \cos v},$$

weil der Winkel $XVY = v$ war.

§. 116.

Wenn wir die Linie VCSRD in Fig. 37 zur ersten Axe, und zur zweiten eine darauf senkrechte Linie VY nehmen, so ist nach §. 115 VY zugleich die Centrale für die centrische Halbirung von CD, wenn der feste Punkt R die centrische Mitte von CD seyn soll.

Die Gleichung an die Curve für dieses Coordinaten-System ist nun:

$$y^2 + (x - \varrho)^2 = r^2,$$

woraus man sieht, daß VD ein Hauptdurchmesser der Curve der Richtung nach ist und daß also der innere Mittelpunkt der Curve in CD enthalten ist.

Wird sein Abstand von V mit m bezeichnet, so ist:

$$m = \frac{VC + VD}{2} = VE,$$

$$\text{also: tng}\ 2m = \frac{\text{tng VC} + \text{tng VD}}{1 - \text{tng VC} \,.\, \text{tng VD}} = \frac{2\varrho}{1 + r^2 - \varrho^2};$$

und der hierdurch bestimmte Punkt E ist der gesuchte Mittelpunkt.

Wenn man in der vorstehenden Gleichung statt y schreibt $\frac{\text{tng}\ z}{\cos x}$ und statt x setzt tng x, so sind x und z die Abscisse und senkrechte Applicate eines Punktes der Curve, und die Gleichung ist dann:

$$\text{tng}\ z^2 + \cos x^2 (\text{tng}\ x^2 - 2\varrho\ \text{tng}\ x + \varrho^2) = r^2 \cos x^2,$$

$$\text{oder: tng}\ z^2 + \sin x^2 - 2\varrho \sin x \cos x + (\varrho^2 - r^2) \cos x^2 = o.$$

Setzt man hierin tng $x = \varrho$ und also $\cos x^2 = \frac{1}{1 + \varrho^2}$, so erhält man die der Abscisse VR zugehörige Applikate z, nämlich:

$$\text{tng}\ z^2 = \frac{r^2}{1 + \varrho^2},$$

$$\text{und also: tng RM} = \text{tng RM}' = \frac{r}{\sqrt{(1 + \varrho^2)}}.$$

Wird also auf der ersten Axe $VX = 90°$ abgeschnitten, so ist nach §. 104 XDRC harmonisch getheilt, und wenn XM gezogen wird, wovon die zweite Axe in μ geschnitten werden mag, so ist:

$$\text{tng}\ V\mu = r,$$

und hiermit also die Constante r der Gleichung construirt worden.

Die Gleichung an eine Berührungslinie der Curve ist:

$$y . u + (x - \varrho) . t - \varrho x + \varrho^2 - r^2 = o.$$

Da nun der Punkt M der Curve bestimmt ist durch (ϱ, r), so hat man als Gleichung der Berührungslinie für ihn die einfache folgende:

$$u = r;$$

d. h., es ist $XL L_\mu$ selbst eine Berührungslinie der Curve. Daher ist denn MM' die Berührungssehne für den Punkt X, so wie PQ eine Berührungssehne für den Punkt V ist.

Als Gleichung an das System der beiden Tangenten VQ und VP findet man:

$$u = \pm \frac{r}{\sqrt{(\varrho^2 - t^2)}} . t.$$

Wird die Cardinale von der Tangente VQ in q geschnitten, so hat man:

$$\text{tng}\, Xq = \frac{r}{\sqrt{(\varrho^2 - r^2)}} = \text{tng}\, VRQ.$$

§. 117.

Aber die bemerkenswertheste Eigenschaft der Curve ist die, daß jede durch den Punkt R gehende Sehne von diesem Punkte centrisch aus V halbirt wird, und also ein centrischer Durchmesser ist.

Die Gleichung an jeden durch R gehenden Hauptkreis hat nämlich die Form:

$$y = k (x - \varrho),$$

in welcher die Größe k durch die Richtung eines solchen Hauptkreises bestimmt wird. Es sey LL' eine solche Sehne und der Endpunkt:

$$L = (x, y),\ L' = (x', y').$$

Da nun der Punkt R = (ϱ, o) ist, so muß also

$$\frac{x + x'}{2} = \varrho \text{ und } \frac{y + y'}{2} = o$$

seyn; und in der That findet man, indem die Gleichung $y = k (x - \varrho)$ mit der Gleichung $y^2 + (x - \varrho)^2 = r^2$ an die Curve verbunden wird:

$$x = \varrho + \frac{r}{\sqrt{(1 + k^2)}},\quad y = \frac{+ kr}{\sqrt{(1 + k^2)}},$$

$$x' = \varrho - \frac{r}{\sqrt{(1 + k^2)}},\quad y' = \frac{- kr}{\sqrt{(1 + k^2)}},$$

und also: $\frac{x + x'}{2} = \varrho$ und $\frac{y + y'}{2} = o$, welche Richtung auch immer die Sehne LL' haben mag.

Dasselbe Resultat findet man auf eine fast eben so einfache Weise aus der allgemeinsten Gleichung

$$(y-b)^2+2(y-b)(x-a)\cos v+(x-a)^2=r^2$$

an den centrischen Kreis.

Wenn aber das Centrum V der Theilung und ein centrischer Durchmesser LL′ gegeben sind, so ist die Construction des centrischen Kreises jedesmal völlig bestimmt.

So wie LL′ ein centrischer Durchmesser ist, sind auch CD und MM′ centrische Durchmesser; aber MM′ ist der einzige, welcher vom centrischen Mittelpunkte R absolut halbirt wird; alle übrigen Durchmesser sind nur centrisch aus V halbirt.

§. 118.

Ist $L=(\alpha,\beta)$ und $L'=(\alpha',\beta')$, so ist, wenn die centrische Mitte R bezeichnet wird mit (t, u):

$$t=\frac{\alpha+\alpha'}{2} \text{ und } u=\frac{\beta+\beta'}{2},$$

und also die Gleichung an den centrischen Kreis:

$$\left[y-\left(\frac{\beta+\beta'}{2}\right)\right]^2+2\left[y-\left(\frac{\beta+\beta'}{2}\right)\right]\left[x-\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\right]\cos v$$
$$+\left[x-\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\right]^2=r^2;$$

und um r zu bestimmen, hat man nur $y=\beta$ und $x=\alpha$ zu setzen, wodurch man findet:

$$r^2=\left(\frac{\beta-\beta'}{2}\right)^2+2\left(\frac{\beta-\beta'}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right)\cos v+\left(\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right)^2,$$

oder auch: $4r^2=(\beta-\beta')^2+2(\beta-\beta')(\alpha-\alpha')\cos v+(\alpha-\alpha')^2$.

Die Gleichung an den durch die Endpunkte des centrischen Durchmessers LL′ bestimmten centrischen Kreis ist also:

$$y^2+2xy\cos v+x^2-[\beta+\beta'+(\alpha+\alpha')\cos v]\,y$$
$$-[\alpha+\alpha'+(\beta+\beta')\cos v]\,.\,x+\beta\beta'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\cos v+\alpha\alpha'=0,$$

oder anders geordnet:

$$y^2+2xy\cos v+x^2-(\beta+\beta')(y+x\cos v)-(\alpha+\alpha')(x+y\cos v)$$
$$+\beta\beta'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\cos v+\alpha\alpha'=0.$$

Wenn der Axenwinkel v ein rechter ist, so zieht sich die Gleichung also zusammen auf:

$$y^2+x^2-(\beta+\beta').y-(\alpha+\alpha').x+\beta\beta'+\alpha\alpha'=0.$$

Wenn aber die Punkte L und L′ nicht die Endpunkte eines centrischen Durchmessers sind, so muß außer dem Centrum V der centrischen Halbirung noch ein dritter Punkt L″ vom Umfange des centrischen Kreises gegeben seyn, wenn die drei Constanten a, b, r in der allgemeinen Gleichung an ihn, und also er selbst, völlig

bestimmt seyn sollen. Die Gleichung wird dann aber zusammengesetzter; nicht so einfach ist sie auch dann, wenn das gegebene Centrum V, in Beziehung auf welches die Durchmesser concentrisch halbirt werden, nicht zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen wird.

§. 119.

Da der im §. 116 behandelte centrische Kreis ein sphärischer Kegelschnitt ist, dessen eine Axe für den inneren Mittelpunkt CD ist, so können wir die Größe dieser Axe leicht durch ϱ und r ausdrücken. Bezeichnen wir sie mit 2B, so ist $\operatorname{tng} 2B = \frac{\operatorname{tng} VD - \operatorname{tng} VC}{1 + \operatorname{tng} VD . \operatorname{tng} VC}$. Da aber nach §. 115 $\operatorname{tng} VD = \varrho + r$ und $\operatorname{tng} VC = \varrho - r$ ist, so haben wir:

$$\operatorname{tng} 2B = \frac{2r}{1 + \varrho^2 - r^2}.$$

Da ferner PQ und MM' die den Punkten V und X zugehörigen Berührungssehnen sind und E der innere Mittelpunkt ist, so hat man:

$$\operatorname{tng} B^2 = \operatorname{tng} ES . \operatorname{tng} EV \text{ und } \operatorname{tng} B^2 = \operatorname{tng} ER . \operatorname{tng} EX,$$

und weil $VX = 90°$ ist, so erhält man durch die Multiplication der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tng} B^4 = \operatorname{tng} ES . \operatorname{tng} ER.$$

Die Elimination von B gibt endlich noch:

$$\operatorname{tng} VE^2 = \cot EX^2 = \frac{\operatorname{tng} ER}{\operatorname{tng} ES}.$$

Wenn man ferner in der Gleichung $\operatorname{tng} z^2 + \sin x^2 - 2\varrho \sin x \cos x + (\varrho^2 - r^2) \cos x^2 = o$ den Anfangspunkt in den Mittelpunkt E verlegt, indem man setzt $x + m$ für x, so erhält die Gleichung die Form:

$$\operatorname{tng} z^2 + P \sin x^2 + 2Q \sin x \cos x - R \cos x^2 = o,$$

und man findet:

$$P = \cos m^2 + 2\varrho \sin m \cos m + (\varrho^2 - r^2) \sin m^2,$$
$$Q = \sin m \cos m - \varrho \cos m^2 + \varrho \sin m^2 - (\varrho^2 - r^2) \sin m \cos m = o,$$
$$-R = \sin m^2 - 2\varrho \sin m \cos m + (\varrho^2 - r^2) \cos m^2.$$

Für den Zusammenhang unter diesen drei Coefficienten findet man: $P - R = 1 + \varrho^2 - r^2$ und $Q^2 + PR = r^2$, oder einfacher $P.R = r^2$, weil $Q = o$ ist. Die Gleichung reduzirt sich also auch auf:

$$\operatorname{tng} z^2 = R \cos x^2 - P \sin x^2.$$

Weil aber $z = o$ für $x = B$ seyn soll, so hat man offenbar: $\operatorname{tng} B^2 = \frac{R}{P}$; und soll eben so $x = o$ seyn für $z = A$, so hat man noch: $\operatorname{tng} A^2 = R$.

Aus diesen beiden Gleichungen findet man nun, wie oben:

$\text{tng } 2B = \frac{2r}{1+\varrho^2-r^2}$; aber man findet auch noch:

$$\frac{\text{tng } A^2}{\text{tng } B} = r,$$

und da der centrische Radius nach §. 116 die Linie $V\mu$ ist, so ist nach §. 71 $V\mu$ auch der der Axe CD zugehörige Parameter.

Da die Größen A und B (die beiden Halbaxen) Functionen von ϱ sind, und also von der Lage des Centrums V der Theilung abhangen, so bedarf es um so mehr der Untersuchung, welche von den beiden Axen die große und welche die kleine sey. Gäbe es nun in CD, wozu der Parameter arc (tng=r) gehört, einen Brennpunkt, dessen Abstand von V wir mit E bezeichnen wollen, so müßte eine in ihm errichtete Applicate z dem eben genannten Parameter gleich seyn. Setzen wir aber in der Gleichung $\text{tng } z^2 + \sin x^2 - 2\varrho \sin x \cos x + (\varrho^2 - r^2) \cos x^2 = 0$, $\text{tng } z = r$ und $x = \varepsilon$, so verwandelt sie sich in:

$$(r.\sin \varepsilon)^2 + (\varrho \cos \varepsilon - \sin \varepsilon)^2 = 0,$$

welche offenbar nicht bestehen kann. Daher ist denn immer CD die kleine Axe des Kegelschnitts, welche Lage auch immer das Centrum V der centrischen Halbirung in ihr haben mag.

Liegt der Punkt V im Scheitel C, so ist: $\text{tng } VC = \varrho - r = 0$, und also: $\varrho = r$. Daher hat man denn: $\text{tng } 2B = 2r$, und also:

$$r = \frac{\text{tng } B}{1 - \text{tng } B^2} = \frac{\text{tng } A^2}{\text{tng } B}.$$

Hieraus aber zieht man: $\sin A = \text{tng } B$, und der Kegelschnitt hat dann also die Beschaffenheit des im §. 87 behandelten.

Wenn das Centrum V der Halbirung zwischen C und D angenommen wird, so findet fast nur darin eine Abänderung Statt, daß nun die dem Punkte V zugehörige Polare PQ keine Berührungssehne mehr ist, sondern sich außerhalb des Kegelschnitts befindet.

Jeder Kegelschnitt kann also als ein centrischer Kreis dargestellt werden, wenn das Centrum V der Halbirung in der kleinen Axe für den inneren Mittelpunkt des Kegelschnitts angenommen wird. Wird dann diese Axe von einem Punkte R centrisch aus V halbirt, so ist R der centrische Mittelpunkt des als centrischen Kreises dargestellten Kegelschnitts.

§. 120.

Betrachten wir nun Fig. 35 das vollständige Viereck ABCDEF, und nehmen wir dasselbe Coordinaten-System, wie auch dieselbe Bezeichnung, als im §. 110, wo die drei Diagonalen centrisch aus dem zum Anfangspunkte der Coordinaten genommenen willkürlichen oder auch gegebenen Centrum V halbirt wurden. Wir können jetzt

nach §. 118 diese drei Diagonalen als Durchmesser von centrischen Kreisen darstellen, und ihre concentrischen Mitten sind dann die centrischen Mittelpunkte dieser drei Kreise. Sie liegen nach §. 110 in einem und demselben Hauptkreise, dessen Gleichung ist:

$$2(\delta-\gamma).x-2(d-b)y=\delta a-\gamma a+\alpha b-\alpha d+\delta b-\gamma d.$$

Da der Punkt $A=(a, \alpha)$ und $D=(d, \delta)$ ist, so ist die Gleichung an den centrischen Kreis, dessen Durchmesser die Diagonale AD ist, nach §. 118:

$$y^2+2xy\cos v+x^2-(\alpha+\delta)(y+x\cos v)-(a+d)(x+y\cos v)$$
$$+(a\delta+\alpha d)\cos v+ad=o.$$

Wir deuten diese Gleichung mit $P=o$ an. Da ferner $B=(b, \alpha)$ und $C=(a, \gamma)$, so ist die Gleichung an einen zweiten Kreis, dessen centrischer Durchmesser die Diagonale BC ist:

$$y^2+2xy\cos v+x^2-(\alpha+\gamma)(y+x\cos v)-(a+b)(x+y\cos v)+\alpha\gamma$$
$$+(b\gamma+a\alpha)\cos v+ab=o.$$

Diese Gleichung mag durch $Q=o$ angedeutet werden. Setzen wir endlich den Punkt $E=(t, u)$ und $F=(t', u')$, so ist die Gleichung an einen dritten Kreis, dessen centrischer Durchmesser die dritte Diagonale EF des Vierecks ist:

$$y^2+2xy\cos v+x^2-(u+u')(y+x\cos v)-(t+t')(x+y\cos v)$$
$$+uu'+(ut'+tu')\cos v+tt'=o.$$

Diese Gleichung mag mit $R=o$ angedeutet werden. Werden hieraus die Gleichungen $P-Q=o$, $Q-R=o$, $P-R=o$ hergeleitet, so gehören sie den gemeinschaftlichen Sehnen der paarweise genommenen Kreise an, und die Gleichung $P-Q=o$ ist namentlich:

$$(\delta-\gamma)(y+x\cos v)+(d-b)(x+y\cos v)+\alpha\gamma-\alpha\delta$$
$$+[\gamma b+\alpha a-\delta a-\alpha d]\cos v+ab-ad+o.$$

Wird aber eben so die Gleichung $Q-R=o$ gebildet, und werden darin die Werthe $t=a$, $u=\frac{\alpha(d-a)-\delta(b-a)}{d-b}$, $t'=\frac{a(\delta-\alpha)-d(\gamma-\alpha)}{\delta-\gamma}$ und $u'=\alpha$ aus §. 110 substituirt, so ist die Gleichung nach einiger Reduction theilbar durch $\delta a-\alpha a-\gamma d+\alpha d-\delta b+\gamma b$, und nach Abwerfung dieses allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors fällt die Gleichung mit der vorigen $P-Q=o$ völlig zusammen. Eine unmittelbare Folge hiervon aber ist es schon, daß die Gleichung $P-R=o$ an die dritte Durchschnittssehne ebenfalls mit der Gleichung $P-Q=o$ dieselbe ist.

Daher haben denn die drei Kreise eine gemeinschaftliche Sehne, und es gibt also zwei Punkte in der Richtung dieser Sehne, in deren jedem die drei Kreise, die über den drei Diagonalen eines Vierecks

als concentrischen Durchmessern beschrieben werden, sich jedesmal schneiden, welche Lage auch immer das gemeinschaftliche Centrum der Halbirung haben mag.

Man beweiset schließlich noch leicht, daß die behandelte gemeinschaftliche Sehne auf demjenigen Hauptkreise senkrecht steht, welcher durch die concentrischen Mitten der drei Diagonalen geht.

Zusatz. Wenn drei Kreise nicht gerade über den drei Diagonalen eines Vierecks, sondern über drei willkürlich anderen concentrisch halbirten Durchmessern beschrieben werden, so sind $P-Q=o$, $Q-R=o$ und $P-R=o$ wieder die Gleichungen an die drei (reellen oder idealen) Durchschnittssehnen der drei paarweise genommenen Kreise, und da die dritte Gleichung gefunden wird, wenn man die beiden ersten addirt, so schneiden sich diese drei Hauptkreise, wie in der Planimetrie die drei Durchschnittssehnen, jedesmal in einem Punkte (abgesehen von seinem Gegenpunkte.)

Anmerkung. Der planimetrische Satz, daß sich die drei Kreise zweimal in Einem Punkte schneiden, welche über den drei Diagonalen eines ebenen Vierecks, als Durchmessern, beschrieben werden, ist schon sehr bemerkenswerth und mir von dem Herrn Bodenmiller hierselbst, der ihn gefunden hat, mündlich mitgetheilt worden. Es findet sich in den mir bekannten, vom Kreise handelnden, Werken nicht.

§. 121.

Der Begriff der centrischen Theilung und insbesondere Halbirung findet noch eine ausgedehntere Anwendung bei den Kegelschnitten. Wenn

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+G=o$$

die Gleichung an einen sphärischen Kegelschnitt und V der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so kann

$$y=(y-u)+u \text{ und } x=(x-t)+t$$

in jener Gleichung substituirt werden, wodurch sie übergeht in:

$$A(y-u)^2+2B(y-u)(x-t)+C(x-t)^2+2D'(y-u)$$
$$+2E'(x-t)+G'=o,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$D'=D+Bt+Au,$$
$$E'=E+Bu+Ct$$
$$\text{und } G'=Au^2+2Btu+2Du+2Et+G.$$

Wird nun der Punkt (t, u), welcher R genannt werden mag, so bestimmt, daß $D'=o$ und $E'=o$ ist, so zieht man aus den Gleichungen $D+Bt+Au=o$ und $E+Bu+Ct=o$ die Ausdrücke:

$$t = \frac{AE - BD}{B^2 - AC} \text{ und } u = \frac{CD - BE}{B^2 - AC},$$

und der Punkt R ist dann der Pol einer Polaren, welche zugleich die Cardinale des Coordinaten-Systems ist. Werden diese Ausdrücke in dem für G' substituirt, so findet man zunächst:

$$G' = Du + Et + G,$$

und dann weiter: $G' = \frac{AE^2 - 2BDE + CD^2 + G(B^2 - AC)}{B^2 - AC}$.

Die Gleichung an den Kegelschnitt aber zieht sich hiernach zusammen auf:

$$A(y-u)^2 + 2B(y-u)(x-t) + C(x-t)^2 + G' = 0.$$

Legen wir nun durch den Punkt R oder (t, u) eine willkürliche Sehne LL' und setzen wir den Endpunkt L derselben = (a, b), den Endpunkt L' eben so = (a', b'), so ist die Gleichung an eine solche Sehne:

$$y - u = k(x - t),$$

und wird sie mit der Gleichung an die Curve verbunden, so erhält man:

$$a = t + \sqrt{\frac{-G'}{Ak^2 + 2Bk + C}} \qquad b = u + k \cdot \sqrt{\frac{-G'}{Ak^2 + 2Bk + C}},$$

$$a' = t - \sqrt{\frac{-G'}{Ak^2 + 2Bk + C}}, \qquad b' = u - k \cdot \sqrt{\frac{-G'}{Ak^2 + 2Bk + C}}.$$

Hieraus aber folgt auf der Stelle:

$$t = \frac{a + a'}{2} \text{ und } u = \frac{b + b'}{2},$$

welchen Werth auch k, d. h., welche Richtung auch die Sehne LL' haben mag, und diesen Formeln gemäß ist der Punkt (t, u) oder R die aus V bestimmte centrische Mitte aller durch R gehenden Sehnen. Diese sind eben deßwegen centrische Durchmesser, und R ist der centrische Mittelpunkt des Kegelschnitts für das Centrum V der Halbirung.

Dieser centrische Mittelpunkt R aber fällt im Allgemeinen mit einem der drei absoluten Mittelpunkte des Kegelschnitts nicht zusammen, und ändert wegen seiner Abhängigkeit vom Punkte V mit ihm zugleich seine Lage, wie es auch bei dem vorhin betrachteten centrischen Kreise der Fall war. Aber der Unterschied findet Statt, daß der Punkt R nun nicht, wie beim centrischen Kreise, jedesmal in der kleinen Axe des Kegelschnitts sich befindet.

Zusatz. Man übersieht bald, daß, wenn der Punkt V in der großen Axe angenommen wird, und das Coordinaten-System rechtwinkelig ist, auch die Gleichung an die Curve eine einfachere Gestalt erhält, nämlich:

$$my^2 + n(x - \rho)^2 = n \cdot r^2.$$

§. 122.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Untersuchung der Ortscurve für die centrischen Mittelpunkte R aller sphärischen Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Punkte geschrieben werden können. Dabei nehmen wir dasselbe Coordinaten-System und dieselbe Bezeichnung, wie im §. 62 und §. 63, wo bewiesen wurde, daß die Ortscurve der wahren Mittelpunkte dieser Kegelschnitte eine Linie der dritten Ordnung sey. Die Gleichung an einen durch die vier Punkte M, M′, N, N′ in Fig. 10 beschriebenen Kegelschnitt ist dann:

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o,$$

worin $A = aa'$, $C = bb'$, $D = -aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)$, $E = -bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)$, $G = aa'.bb'$, und der Coefficient B allein unbestimmt ist. Da nun der centrisch aus V zu bestimmende Mittelpunkt R oder (t, u) gefunden wird aus den Gleichungen

$$D + Bt + Au = o \text{ und } E + Bu + Ct = o,$$

so wird man aus diesen B eliminiren, wodurch man als Gleichung an die Ortscurve des Punktes R findet:

$$Au^2 - Ct^2 + Du - Et = o,$$

oder auch: $aa'.u^2 - bb'.t^2 - aa'\left(\frac{b+b'}{2}\right)u + bb'\left(\frac{a+a'}{2}\right)t = o.$

Diese Gleichung gehört wieder einem Kegelschnitte an und läßt sich auch unter folgende Form bringen:

$$aa'.u\left(u - \frac{b+b'}{2}\right) = bb't\left(t - \frac{a+a'}{2}\right).$$

Ganz eben so, wie in der Planimetrie, findet man nun, daß die Curve durch die folgenden neun Punkte geht:

1. durch den Anfangspunkt V ($t = o$, $u = o$),
2. durch die centrische Mitte von NN′ $\left(t = o,\ u = \frac{b+b'}{2}\right)$,
3. durch die centrische Mitte von MM′ $\left(t = \frac{a+a'}{2},\ u = o\right)$,
4. durch die centrische Mitte von MN $\left(t = \frac{a}{2},\ u = \frac{b}{2}\right)$,
5. durch die centrische Mitte von M′N′ $\left(t = \frac{a'}{2},\ u = \frac{b'}{2}\right)$,
6. durch die centrische Mitte der Diagonale MN′ $\left(t = \frac{a}{2},\ u = \frac{b'}{2}\right)$,

7. durch die centrische Mitte der Diagonale NM' $\left(t=\frac{a'}{2},\ u=\frac{b}{2}\right)$,

8. durch den Durchschnittspunkt U der beiden Diagonalen NM' und N'M oder $t=\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}$, $u=\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}$,

9. durch den Durchschnittspunkt W der beiden anderen Gegenseiten MN und M'N' des Vierecks, nämlich:

$$t=\frac{aa'(b'-b)}{ab'-a'b};\ u=\frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b}.$$

§. 123.

Werden die centrischen Mitten α und β der beiden Gegenseiten MM' und NN' durch eine Linie $\alpha\beta$ verbunden, so ist: $\alpha=\left(o,\frac{b+b'}{2}\right)$ und $\beta=\left(\frac{a+a'}{2},o\right)$; daher ist die centrische Mitte von $\alpha\beta$ bestimmt durch:

$$t=\frac{a+a'}{4};\ u=\frac{b+b'}{4}.$$

Werden die centrischen Mitten von MN und M'N' durch $\gamma\eta$ verbunden, so ist: $\gamma=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ und $\eta=\left(\frac{a'}{2},\frac{b'}{2}\right)$; also ist die centrische Mitte von $\gamma\eta$ bestimmt durch:

$$t=\frac{a+a'}{4} \text{ und } u=\frac{b+b'}{4}.$$

Werden die centrischen Mitten der beiden Diagonalen durch $\delta\varepsilon$ verbunden, so ist: $\delta=\left(\frac{a}{2},\frac{b'}{2}\right)$ und $\varepsilon=\left(\frac{a'}{2},\frac{b}{2}\right)$; also ist die centrische Mitte von $\delta\varepsilon$ bestimmt durch:

$$t=\frac{a+a'}{4} \text{ und } u=\frac{b+b'}{4}.$$

Daher schneiden sich die drei Linien $\alpha\beta$, $\gamma\eta$ und $\delta\varepsilon$ in einem Punkte S, wovon diese drei Linien selbst centrisch aus V halbirt werden.

Wenn man ferner aus der Gleichung $Au^2-Ct^2+Du-Et=o$ an die Ortscurve des Punktes R die Axen-Coordinaten des centrischen Mittelpunktes entwickelt, so findet man diesen Mittelpunkt bestimmt durch: $\left(\frac{a+a'}{4},\frac{b+b'}{4}\right)$, und es ist also der so eben gefundene Durchschnittspunkt S zugleich der centrische Mittelpunkt der Ortscurve des Punktes R.

Es war nur der größeren Einfachheit wegen das gemeinschaftliche Centrum aller centrischen Theilungen in einem der Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Vierecks MM'N'N selbst angenommen worden. Wenn wir aber diesem Centrum eine willkürliche andere Stelle geben, so erhält der Punkt R eine andere Lage; alle centrischen Halbirungspunkte sind dann im Allgemeinen verschieden von den vorigen; aber wie sich auch die Lage aller dieser Punkte ändern möge, so finden wir gleichwohl immer wieder dasselbe Gesetz des Zusammenhanges.

Aus diesen wenigen Beispielen, die wir noch ansehnlich vermehren könnten, wird Jeder die außerordentliche Fruchtbarkeit des Begriffes der centrischen Theilung zur Genüge abnehmen, und in den Grundlehren dieser Theilung das einfachste Mittel der analytischen Sphärik erkennen, zu allgemeinen planimetrischen Sätzen sogleich die analogen für die Sphärik zu finden, falls eine solche Uebertragung möglich ist, ohne zu der Projection der ebenen Construction auf die Kugelfläche gezwungen zu seyn, welche der construirenden Geometrie zusteht.

Nachträge und Anmerkungen.

1.

Wenn ein System zweier Hauptkreise VA und VB (Fig. 30) von einem Systeme zweier anderen Hauptkreise WB und Wb in den vier Punkten A, B, a, b geschnitten wird, so finden die beiden folgenden Proportionen Statt:

$$\frac{\sin WA}{\sin WB} = \frac{\sin Aa}{\sin Va} : \frac{\sin Bb}{\sin Vb},$$

$$\frac{\sin Wa}{\sin Wb} = \frac{\sin Aa}{\sin VA} : \frac{\sin Bb}{\sin VB}.$$

Da nämlich im Dreiecke Vba ist: $\frac{\sin Vb}{\sin Va} = \frac{\sin a}{\sin b}$, auch im Dreiecke WBb ist:

$$\frac{\sin Bb}{\sin WB} = \frac{\sin W}{\sin b},$$

und im Dreiecke WAa ist: $\frac{\sin Aa}{\sin WA} = \frac{\sin W}{\sin a}$, so folgt aus den beiden letzten Proportionen:

$$\frac{\sin Bb}{\sin WB} : \frac{\sin Aa}{\sin WA} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

und es ist also: $\frac{\sin Vb}{\sin Va} = \frac{\sin Bb}{\sin WB} : \frac{\sin Aa}{\sin WA}$, oder auch:

$$\frac{\sin WA}{\sin WB} = \frac{\sin Aa}{\sin Va} : \frac{\sin Bb}{\sin Vb}.$$

Auf eben so einfache Weise kann die zweite Proportion bewiesen werden, wodurch im Grunde dieselbe metrische Beziehung ausgedrückt wird. Wenn umgekehrt die Proportion $\frac{\sin WA}{\sin WB} = \frac{\sin Aa}{\sin Va} : \frac{\sin Bb}{\sin Vb}$ befriedigt ist, so folgt daraus, daß die drei Punkte W, a, b einem und demselben Hauptkreise angehören.

Aus den aufgestellten beiden Proportionen folgt noch eine dritte:

$$\frac{\sin WA}{\sin WB} : \frac{\sin Wa}{\sin Wb} = \frac{\sin VA}{\sin VB} : \frac{\sin Va}{\sin Vb}.$$

2.

Wenn die beiden Hauptkreise WB und Wb so gelegt werden, daß

$$\frac{\sin Aa}{\sin Va} = \frac{\sin Bb}{\sin Vb}$$

ist, so folgt aus der Proportion $\frac{\sin WA}{\sin WB} = \frac{\sin Aa}{\sin Va} : \frac{\sin Bb}{\sin Vb}$ auf der Stelle, daß $\sin WA = \sin WB$ oder also

$$WA + WB = 180^\circ$$

ist, und hierdurch ist die Lage des Punktes W im Hauptkreise AB bestimmt. Die so eben erhaltene Formel läßt sich noch einfacher darstellen, wenn man AB durch den Punkt C halbirt; weil nämlich dann $WC = \frac{WA + WB}{2}$ ist, so findet man: $WC = 90^\circ$.

Wenn umgekehrt $WC = 90^\circ$ und C die Mitte von AB ist, so gilt die einfache Proportion:

$$\frac{\sin Aa}{\sin Va} = \frac{\sin Bb}{\sin Vb}.$$

Ist also, z. B., a die Mitte von VA, so ist auch b die Mitte von VB.

3.

Die vorigen Sätze wenden wir an bei der Herleitung eines Theorems, welches als ein Fundamentalsatz für die Lehre von der Verwandlung und Theilung der sphärischen Figuren mittelst der Construction anzusehen ist. Dieses Theorem wurde auf analytischem Wege von dem Verfasser gefunden, und ich theile hier einen elementaren Beweis desselben mit in Ermangelung eines noch einfacheren; denn es steht zu wünschen, daß dieser den Elementen der Geometrie oder Sphärik zugehörige Satz in möglichster Einfachheit dargestellt werde, und deßhalb übergehe ich auch hier die analytische Herleitung desselben, wodurch ich ihn fand. Er lautet wie folgt: „Wenn man die drei Seiten eines Dreiecks ABC in Fig. 39 durch die Punkte D, F, G halbirt, und durch zwei derselben G und F ein Hauptkreis GFK gelegt wird, wovon die dritte Seite des Dreiecks in K geschnitten wird; darauf ein rechtwinkeliges Dreieck KQR construirt wird, dessen eine Kathete KQ gleich DB oder DA ist: so ist seine Hypotenuse $KR = FG$ und seine andere Kathete QR das halbe Maß für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC."

Bezeichnet man den Radius der Kugel mit ϱ, die Winkel des Dreiecks mit A, B, C und ihre Gegenseiten mit a, b, c, ferner den Inhalt des Dreiecks mit $s \cdot \varrho^2$, so ist bekanntlich: $s = A + B + C - \pi$. (π ist die Ludolphische Zahl.)

Ferner ist: $\sin \frac{1}{2} s = \frac{\sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \sin C}{\cos \frac{c}{2}}$ und

$$\cos\frac{1}{2}s=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}},$$

woraus noch folgt: $\operatorname{tng}\frac{1}{2}s=\dfrac{\sin C}{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos C}$.

Diese längst bekannten Formeln führen uns bald zum Ziele, und es ist jetzt nöthig, die Länge von GF, wie auch die Größe des Winkels K trigonometrisch zu bestimmen.

Da $\cos GF=\cos CG.\cos CF+\sin CG.\sin CF.\cos C$ ist, so hat man zunächst:

$\cos GF=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C$, und also einfacher:

$$\cos FG=\cos\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{s}{2}.$$

Ferner ist im Dreiecke KBF noch:

$$\cot K=\frac{\cot BF.\sin BK-\cos BK.\cos KBF}{\sin KBF},\text{ oder:}$$

$\cot K=\dfrac{\cot\frac{a}{2}.\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}\cos B}{\sin B}$; denn es ist $DK=90°$ (nach Nro. 2).

Man hat also auch: $\cot K=\sin\frac{c}{2}\left(\dfrac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{c}{2}+\cos B}{\sin B}\right)$ oder

$$\cot K=\sin\frac{c}{2}\cdot\cot\frac{1}{2}s.$$

Wird nun also $KQ=\frac{AB}{2}=\frac{c}{2}$ abgeschnitten und das an Q rechtwinkelige Dreieck RQK construirt, so ist bekanntlich: $\operatorname{tng}QR=\operatorname{tng}K.\sin\frac{c}{2}$, und also: $\operatorname{tng}QR=\operatorname{tng}\frac{1}{2}s$ oder $QR=\frac{1}{2}s$.

Um nun noch zu beweisen, daß die Hypotenuse $KR=GF$ ist, bedenke man, daß $\cos KR=\cos KQ.\cos QR$ und also $\cos KR=\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{s}{2}$ ist; denn da auch $\cos GF=\cos\frac{c}{2}.\cos\frac{s}{2}$ ist, so folgt auf der Stelle: $GF=KR$.

Wenn aber im Eingange dazu die folgende Behauptung ausgesprochen wird: „die künstlichen Ausdrücke, welche für den Radius des genannten Ortskreises und zur Bestimmung der Lage seines Mittelpunktes gefunden werden, sind nicht geeignet, die eigentliche Lage des Kreises leicht zu erkennen zu geben, noch weniger, denselben danach leicht construiren zu können," so scheint mir hierin ein Vorwurf gegen die analytische Geometrie zu liegen, welcher, wie man sieht, ungegründet wäre, da im Vorhergehenden nicht nur der Radius, sondern auch die Lage des Mittelpunktes des Kreises auf die einfachste Weise bestimmt worden sind und also eine Frage beantwortet ist, welche in der citirten Abhandlung selbst nicht in aller Einfachheit gelöset worden ist.

5.

Um nun noch deutlich zu machen, daß durch den in Nro. 3 bewiesenen Satz das mehrgedachte Lexell'sche Theorem in etwa überflüssig geworden ist, legen wir die Auflösung der beiden wichtigsten Aufgaben vor, worauf es bei der rein geometrischen Verwandlung sphärischer Figuren ankommt.

Es ist (Fig. 40) ein Dreieck ABC gegeben; man soll über seiner Grundlinie AB ein eben so großes anderes Dreieck construiren, das an jener Grundlinie einen gegebenen Winkel ABC' enthält.

Man halbire die Seiten AC und BC durch den Hauptkreis FG, wovon AC' in G' geschnitten werden mag, und mache G'C' = G'A', so ist BAC' das verlangte Dreieck.

Außerdem ist auch noch nach Nro. 2 und 3 offenbar BF' = F'C' und GG' = FF', wenn der Durchschnittspunkt von FG und BC' mit F' bezeichnet wird.

Man hätte auch FF' = GG' machen können, und die durch G' und F' gelegten Hauptkreise AG' und BF' würden sich dann in C' so geschnitten haben, daß ABC' das verlangte Dreieck wäre.

Die zweite Aufgabe ist die folgende: Es ist ein Dreieck ABC gegeben und man soll ein zweites A'CB' so construiren (Fig. 41), daß es mit dem vorigen den Winkel C gemein, aber statt der Seite CB die Seite CB' habe.

Man halbire BB' und BA durch den Hauptkreis FG, wovon CA in F' geschnitten werden mag, und mache F'A' = F'A, so ist CB'A' das gesuchte Dreieck.

Außerdem ist noch B'G' = G'A' und FG = F'G'.

Die Anwendung des Lexell'schen Satzes gibt keine so einfache Auflösung der beiden vorgelegten Aufgaben (wie aus der citirten Abhandlung des Herrn Steiner zu ersehen ist), und die hier ange-

gebene Auflösung hat noch dazu den Vorzug, daß sie für die Kugelfläche und die Ebene zugleich gilt, wenn nur hier gerade Linien statt der Hauptkreise genommen werden.

Will man endlich sphärische Dreiecke theilen, so dient der in Nro. 3 bewiesene Satz ebenfalls als Grundlage der Auflösung, da ihm gemäß das Maß für den halben Inhalt des Dreiecks leicht construirt und demnächst getheilt werden kann.

6.

Die im §. 12 und §. 13 behandelte Aufgabe kann auch um Vieles einfacher aufgelöset werden, wie folgt. Es sey Q (t, u) das sphärische Centrum des gegebenen Hauptkreises, dessen Gleichung $ax + by + c = o$ gegeben ist, und man hat daher:

$$t = \frac{a - b \cos v}{c \sin v^2} \text{ und } u = \frac{b - a \cos v}{c \sin v^2}.$$

Auf diesen Hauptkreis soll vom gegebenen Punkte P oder (m, n) ein Loth gefällt werden, wovon er im Punkte P′ getroffen werden mag. Zieht man PQ, so steht PQ schon senkrecht auf dem gegebenen Hauptkreise, und es ist: $QP + PP' = 90°$, oder also: $QP + r = 90°$, und also: $\sin r = \cos QP$.

Es ist nun aber nach §. 6:

$$\cos PQ = \frac{1 + m(t + u \cos v) + n(u + t \cos v)}{\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos v)} \cdot \sqrt{(1 + m^2 + n^2 + 2mn \cos v)}},$$

und: $t + u \cos v = \frac{a}{c}$; $u + t \cos v = \frac{b}{c}$; ferner ist auch:

$$\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos v)} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 \sin v^2 - 2ab \cos v)}}{c \sin v};$$

und werden diese Werthe substituirt, so hat man auf der Stelle:

$$\sin r = \cos QP = \frac{(ma + nb + c) \sin v}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2 + 2mn \cos v)} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 \sin v^2 - 2ab \cos v)}}.$$

Ferner ist die gesuchte Gleichung an das Perpendikel:

$$y - n = \frac{u - n}{t - m}(x - m),$$

und werden hierin für t und u die vorstehenden Werthe ebenfalls substituirt, so hat man die Gleichung:

$$y - n = \frac{b - a \cos v - nc \sin v^2}{a - b \cos v - mc \sin v^2}(x - m),$$

wie im §. 12.

7.

Wenn man (Fig. 4) von den Ecken eines Dreiecks ABC

nach den Gegenseiten oder ihren Verlängerungen die Geraden Aa, Bb, Cc so zieht, daß sie sich in einem Punkte M schneiden, so ist:

$$\frac{\sin Ac}{\sin cB} \cdot \frac{\sin Ba}{\sin aC} \cdot \frac{\sin Cb}{\sin bA} = 1.$$

Es ist nämlich (nach Nro. 1):

$$\frac{\sin Bc}{\sin BA} = \frac{\sin cM}{\sin CM} : \frac{\sin Ab}{\sin Cb} \text{ und } \frac{\sin Ac}{\sin AB} = \frac{\sin cM}{\sin CM} : \frac{\sin Ba}{\sin Ca},$$

und wird die zweite Proportion durch die erste dividirt, so erhält man die folgende:

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} = \frac{\sin Ab}{\sin Cb} \cdot \frac{\sin Ca}{\sin Ba},$$

welche mit der zu beweisenden gleichbedeutend ist. Wenn umgekehrt die drei Punkte a, b, c in den Seiten des Dreiecks ABC dieser Proportion Genüge leisten, so schneiden sich die Linien Aa, Bb, Cc in einem Punkte M. Die Punkte a, b, c können auch in den Verlängerungen der Seiten sich befinden; aber gleichzeitig immer zwei derselben, nicht alle drei oder nur einer von ihnen. — Dieses wird hinreichen zur Erläuterung des am Ende des §. 15 gebrauchten Schlusses.

Die aufgestellte Relation läßt sich noch umformen; denn es ist:

$$\frac{\sin Ac}{\sin cB} = \frac{\sin AC \cdot \sin ACM}{\sin BC \cdot \sin BCM},$$

$$\frac{\sin Ba}{\sin Ca} = \frac{\sin AB \cdot \sin BAM}{\sin CA \cdot \sin CAM},$$

$$\frac{\sin Cb}{\sin Ab} = \frac{\sin CB \cdot \sin CBM}{\sin AB \cdot \sin ABM};$$

und werden diese drei Proportionen multiplizirt, so erhält man auf der Stelle:

$$\frac{\sin ACM}{\sin BCM} \cdot \frac{\sin BAM}{\sin CAM} \cdot \frac{\sin CBM}{\sin ABM} = 1.$$

Wenn umgekehrt die drei Winkel A, B, C durch die Linien Aa, Bb, Cc dieser Formel gemäß getheilt werden, so schneiden sich die drei Linien in einem Punkte M.

8.

Es seyen AXCN, DXBM und VNWM die drei Diagonalen eines sogenannten vollständigen Vierecks (Fig. 42), so ist nach Nro. 7:

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BC}{\sin VC} \cdot \frac{\sin VD}{\sin DA} = 1.$$

Nun ist aber auch: $\frac{\sin WB}{\sin WA} = \frac{\sin BC}{\sin VC} \cdot \frac{\sin VD}{\sin DA}$, nach Nro. 1; also

hat man auch: $\frac{\sin AF . \sin WB}{\sin BF . \sin WA} = 1$, oder es ist AFBW harmonisch getheilt. Diese Proportion läßt sich umformen in: $\sin AVF . \sin WVB = \sin FVB . \sin AVW$, und es haben also die vier Geraden VA, VF, VB, VW eine solche Lage, daß jede fünfte Gerade von ihnen (nach §. 14) harmonisch getheilt wird. Daher sind EXGW, DHCW und AXCN harmonisch getheilt. Ein Gleiches gilt also auch von VDEA, VHXF, VCGB und DXBM. Schließlich folgt auf dieselbe Weise auch noch, daß VNWM harmonisch getheilt ist. Auf diesem Wege kann man viele zum Theil sehr zusammengesetzte Theoreme beweisen; sie machen aber einen Theil der Sphärik aus, welchen man ihrer analytischen Darstellung eher vorausschicken, als einverleiben müßte, und der zwar in einem die Sphärik überhaupt betreffenden Werke den gehörigen Platz finden würde, hier aber eben deßwegen nicht in größerer Ausführung schicklicher Weise behandelt werden kann.

9.

Die im §. 31 hergeleitete Formel $\operatorname{tng} \varphi = \sin \varrho . \frac{\partial v}{\partial \varrho}$ läßt sich noch einfacher aus der Formel $\operatorname{tng} \lambda = \cos u . \frac{\partial t}{\partial u}$ im §. 24 herleiten; denn es ist offenbar: $\lambda + \varphi = 180°$, ferner: $t = v + \text{const}$ und $\varrho + u = 90°$. Daher ist denn: $\operatorname{tng} \lambda = -\operatorname{tng} \varphi$, $\cos u = \sin \varrho$, $\partial t = \partial v$ und $\partial u = -\partial \varrho$.

Die Substitution dieser Werthe gibt auf der Stelle die Formel: $\operatorname{tng} \varphi = \sin \varrho . \frac{\partial v}{\partial \varrho}$.

Ferner geht die Formel $\partial s = \sqrt{(\partial u^2 + \cos u^2 . \partial t^2)}$ im §. 24 für das Differenzial des Bogens durch die angegebenen Substitutionen über in: $\partial s = \sqrt{(\partial \varrho^2 + \sin \varrho^2 \, \partial v^2)}$, welche Formel mit der im §. 31 für ∂s hergeleiteten übereinstimmt.

Offenbar läßt sich auf diese Weise auch der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Formeln für den Krümmungshalbmesser leicht herleiten.

10.

Im §. 42 wurden für die Quadratur der Cykloide zwei Hülfswinkel α und ψ angewandt, welche hier geometrisch nachgewiesen werden sollen, und für welche die Formeln

$$\operatorname{tng} \psi = \frac{\sqrt{(\sin z . \sin 2r - \sin z^2)}}{\sin r - \sin z . \cos r},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\sin z}{\sin 2r}}$$

aufgestellt waren. Ferner war nach §. 39: $\sin z = \sin r . \cos r (1 - \cos \varphi) = \sin 2r . \sin \frac{1}{2} \varphi^2$, und also: $\sin \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{\sin z}{\sin 2r}}$; daher ist denn: $\alpha = \frac{1}{2} \varphi$, und also α die Hälfte des Winkels MCN in Fig. 7.

Was nun den Winkel ψ betrifft, so findet man aus der obigen Formel leicht die folgende:

$$\cos \psi = \frac{\sin r - \cos r . \sin z}{\sin r . \cos z}.$$

Nun ist aber im Dreieck CMY auch: $\cos CMY = \frac{\cos CY - \cos CM . \cos YM}{\sin CM . \sin YM}$, oder, weil $CY = 90° - r$, $CM = r$, $YM = 90° - z$ ist: $\cos CMY = \frac{\sin r - \cos r \sin z}{\sin r . \cos z}$, und es ist also der Hülfswinkel ψ derselbe mit dem Winkel CMY.

Aus der Formel $\sin \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{\sin z}{\sin 2r}}$ folgt: $\cos \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{\sin 2r - \sin z}{\sin 2r}}$, und es ist also: $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{(\sin 2r . \sin z - \sin z^2)}}{\sin 2r}$, oder rückwärts: $\sqrt{(\sin 2r . \sin z - \sin z^2)} = \sin r . \cos r . \sin \varphi$. Daher verwandelt sich denn die allgemeine Formel für den Inhalt f im §. 42 in die folgende:

$$f = \psi - \varphi \cos r^3 - \sin r^2 . \cos r . \sin \varphi.$$

Für die Berechnung des Winkels ψ findet man auch noch die einfacheren Formeln:

$$\sin \frac{1}{2} \psi = \sqrt{\frac{\sin \frac{z}{2} . \cos\left(r + \frac{z}{2}\right)}{\cos z . \sin r}} \text{ und } \cos \frac{1}{2} \psi = \sqrt{\frac{\cos \frac{z}{2} . \sin\left(r - \frac{z}{2}\right)}{\cos z . \sin r}},$$

$$\text{also: } \operatorname{tng} \frac{1}{2} \psi = \sqrt{\left[\frac{\cos\left(r + \frac{z}{2}\right)}{\sin\left(r - \frac{z}{2}\right)} . \operatorname{tng} \frac{1}{2} z\right]},$$

und den Zusammenhang zwischen ψ und φ drückt aus die Formel:

$$\sin \psi = \frac{\cos r . \sin \varphi}{\cos z}.$$

Ueber ein neues Coordinaten-System der analytischen Sphärik.

11.

In der ersten Abhandlung: „Ueber ein neues Coordinaten-System", im fünften Bande des Journales für die reine und angewandte Mathematik theilt der Herr Professor Plücker die Idee eines neuen Coordinaten-Systems mit, welche zwar zunächst nur die analytische Planimetrie betrifft, aber offenbar auch leicht in die Stereometrie übertragen werden kann, wenn man nur statt des (ebenen) Coordinaten-Dreiecks eine Coordinaten-Pyramide substituirt, wozu man dann die dreikantige wählen wird.

Aber auch für die analytische Sphärik läßt sich von jener Idee Vortheil ziehen, und im Nachfolgenden wird ihre Ausführung in Kürze mitgetheilt werden, wobei dem anfänglichen Grundsatze für die Sphärik gemäß die Anwendung der absolut-geraden Linien völlig ausgeschlossen ist.

Man kann die Lage eines Punktes M der Kugelfläche bestimmen, indem man von ihm auf die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 43) die Perpendikel $MP = p$, $MQ = q$ und $MR = r$ fällt und die Verhältnisse

$$x = \frac{\sin q}{\sin p} \text{ und } y = \frac{\sin r}{\sin p}$$

bildet; denn durch das erste Verhältniß ist die Richtung der Linie AM und durch das zweite die Richtung der Linie BM bestimmt, und der Durchschnittspunkt beider ist der Punkt M selbst. Man kann noch ein drittes Verhältniß

$$z = \frac{\sin r}{\sin q}$$

zur Bestimmung der Richtung der Geraden CM hinzufügen; aber der Werth dieses Verhältnisses ist schon durch die beiden vorigen bestimmt; denn man hat:

$$z = \frac{y}{x}.$$

Ueberhaupt findet man also, wenn zwei von den drei Verhältnissen x, y, z gegeben sind, daraus immer schon die Größe des dritten.

Man hat offenbar auch:

$$x = \frac{\sin MAC}{\sin MAB}, \; y = \frac{\sin MBC}{\sin MBA} \text{ und } z = \frac{\sin MCB}{\sin MCA}.$$

Das Dreieck ABC heiße das Coordinaten-Dreieck;

die Größen x, y, z heißen das erste, das zweite, das dritte Coordinaten-Verhältniß.

Die Gleichung $x=\alpha$ ist die Gleichung einer Geraden AM, welche von der ersten Coordinaten-Ecke aus gezogen ist, und eben so gehört $x=-\alpha$ mit einer Geraden M′M″ zusammen, welche auch durch die erste Coordinaten-Ecke geht, aber so gezogen ist, daß von den vier Geraden AB, AM, AC, AM′ jede fünfte harmonisch getheilt wird, oder daß jene vier geraden Linien Harmonikalen sind.

Die Gleichung $x=+1$ gehört der Geraden AM zu, wenn sie den Winkel BAC halbirt, und $x=-1$ gehört der Geraden AM′ zu, wenn sie den Nebenwinkel von BAC halbirt.

Eine ähnliche Bewandtniß hat es mit den Gleichungen $y=\beta$ und $z=\gamma$ in Hinsicht auf die beiden anderen Coordinaten-Ecken.

Soll aber durch diese drei Gleichungen $x=\alpha$, $y=\beta$ und $z=\gamma$ nur ein Punkt M der Lage nach bestimmt werden, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$\gamma=\frac{\beta}{\alpha}.$$

12.

Zur deutlicheren Kenntniß der neuen Coordinaten-Methode ist es gut, den Zusammenhang mit der früheren Methode nachzuweisen, und die Coordinaten-Verhältnisse x und y eines Punktes M durch die trigonometrischen Tangenten der Axen-Coordinaten eben dieses Punktes M oder (t, u) auszudrücken, wobei wir CA und CB zu Coordinaten-Axen und C zum Anfangspunkte nehmen.

Bezeichnen wir die Winkel des Dreiecks ABC mit A, B, C und ihre Gegenseiten mit a, b, c, so ist nach §. 8 die Gleichung an AB:

$$t\,.\cot b+u\cot a=1,$$

oder, wenn wir für einen Augenblick setzen $\operatorname{tng} b=m$ und $\operatorname{tng} a=n$:

$$nt+mu-mn=o.$$

Fällen wir nun von M das Loth $MP=p$ auf AB und noch von C ein Loth $=\pi$ auf AB, so ist nach §. 13:

$$\sin p=\frac{(mn-nt-mu)\,.\sin C}{\sqrt{(1+t^2+u^2+2tu\cos C)}\,.\sqrt{(n^2-2mn\cos C+m^2+m^2n^2\sin C^2)}},$$

$$\text{und } \sin\pi=\frac{mn\,.\sin C}{\sqrt{(n^2-2mn\cos C+m^2+m^2n^2\sin C^2)}},$$

$$\text{also: } \frac{\sin p}{\sin\pi}=\frac{1-\frac{t}{m}-\frac{u}{n}}{\sqrt{(1+t^2+u^2+2tu\cos C)}}.$$

Da aber auch $\sin \pi . \sin c = \sin a . \sin b . \sin C$ ist, so hat man:

$$\sin p = \frac{\sin a . \sin b . \sin C}{\sin c} \cdot \frac{1 - \frac{t}{m} - \frac{u}{n}}{\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)}}.$$

Eben so findet man für die Perpendikel $MQ = q$ und $MR = r$ die Ausdrücke:

$$\sin q = \frac{u \sin C}{\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)}},$$

$$\sin r = \frac{t \sin C}{\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)}},$$

und da $x = \frac{\sin q}{\sin p}$ und $y = \frac{\sin r}{\sin p}$ ist, so findet man:

$$x = \frac{u \sin c}{\sin a \sin b \left(1 - \frac{t}{m} - \frac{u}{n}\right)},$$

$$y = \frac{t \sin c}{\sin a \sin b \left(1 - \frac{t}{m} - \frac{u}{n}\right)},$$

woraus noch folgt: $z = \frac{y}{x} = \frac{t}{u}$. Werden für m und n die Werthe substituirt, so erhält man:

$$x = \frac{u . \sin c}{\sin a \sin b - t \sin a \cos b - u \sin b \cos a},$$

$$y = \frac{t . \sin c}{\sin a \sin b - t \sin a \cos b - u \sin b \cos a}.$$

Wichtiger noch werden diese Formeln für unseren Zweck, wenn wir sie umkehren, wodurch wir erhalten:

$$t = \frac{y . \sin a . \sin b}{\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b},$$

$$u = \frac{x . \sin a . \sin b}{\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b};$$

denn nun dienen dieselben dazu, aus einem Ausdrucke, welcher t und u enthält, diese Größen fortzuschaffen, worauf er dann die Coordinaten-Verhältnisse x und y des Punktes M enthält.

Am einfachsten werden diese Formeln, wenn $a = b = c = 90°$ genommen wird; denn dann hat man:

$$t = y \text{ und } u = x,$$

wie auch anderweitig erhellet, wenn man bedenkt, daß nun auch

MA mit MR, MQ mit MB und MP mit MC gerade Linien ausmachen, deren jede $=90°$ ist.

Daher ist die neue Coordinaten-Methode nur eine Verallgemeinerung des Gebrauches der Amplituden.

13.

Aus der allgemeinen Gleichung $Dt+Eu=G$ an einen Hauptkreis im früheren Coordinaten-Systeme können wir jetzt übergehen zu einer Gleichung zwischen den Coordinaten-Verhältnissen eines Punktes M eben dieses Hauptkreises, indem wir die vorhin gefundenen Ausdrücke für t und u substituiren, wodurch wir erhalten:

$$y(\sin a \sin b.D-\sin a\cos b.G)+x(\sin a \sin b.E-\sin b\cos a.G) = G.\sin c,$$

oder: $$y(D-G\cot b)+x(E-G\cot a)=\frac{G.\sin c}{\sin a \sin b}.$$

Die neue Gleichung hat also die Form:

$$\alpha.y+\beta.x+\gamma=o,$$

oder auch, wenn die Werthe $y=\frac{\sin r}{\sin p}$ und $x=\frac{\sin q}{\sin p}$ substituirt werden, die Form:

$$\alpha.\sin r+\beta.\sin q+\gamma.\sin p=o.$$

Stellt also in Fig. 44 PMQ einen Hauptkreis vor und ist $\frac{\sin QAC}{\sin QAB}=m$, ferner $\frac{\sin PBA}{\sin PBC}=n$, $\frac{\sin MAC}{\sin MAB}=x$ und $\frac{\sin MBC}{\sin MBA}=y$, so ist: $x=m$ für $y=o$ und $y=n$ für $x=o$. Daher hat man: $\beta.m=-\gamma$ und $\alpha n=-\gamma$, und es verwandelt sich die Gleichung an die Gerade PMQ dadurch in:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

14.

Die allgemeine Gleichung an einen Hauptkreis, dessen sphärisches Centrum der Punkt (t', u') ist, ist bekanntlich:

$$1+(t'+u'\cos C).t+(u'+t'\cos C.u=o.$$

Sind nun x' und y' die beiden Coordinaten-Verhältnisse eben jenes Mittelpunkts, so findet man durch die in Nro. 12 angegebene Substitution die Gleichung:

$$\frac{[(x'+y'\cos C).x+(y'+x'\cos C).y].\sin a^2.\sin b^2}{\sin c+x'\sin b\cos a+y'\sin a\cos b)(\sin c+x\sin b\cos a+y.\sin a\cos b} + 1=o.$$

Wird der Nenner fortgeschafft und bemerkt, daß $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ ist, so findet man die Gleichung:

$yy' \sin a^2 + (xy' + yx') \sin a \sin b \cos c + xx' \sin b^2 + (y+y') \sin a \sin c \cos b + (x+x') \sin b \sin c \cos a + \sin c^2 = 0$,

welche also die folgende Form hat: $P + Qx + Ry = 0$; und für die Constanten α, β, γ hat man dann die Ausdrücke:

$$x' \sin b^2 + y' \sin a \sin b \cos c + \sin b \sin c \cos a = Q,$$
$$y' \sin a^2 + x' \sin a \sin b \cos c + \sin a \sin c \cos b = R,$$
$$y' \sin a \sin c \cos b + x' \sin b \sin c \cos a + \sin c^2 = P.$$

Wenn umgekehrt die Gleichung $Qx + Ry + P = 0$ eines Hauptkreises gegeben ist, so kann man aus den Constanten Q, P, R die beiden Coordinaten-Verhältnisse x' und y' für sein sphärisches Centrum finden. Dazu dienen die Gleichungen:

$$\frac{x' \sin b^2 + y' \sin a \sin b \cos c + \sin b \sin c \cos a}{y' \sin a \sin c \cos b + x' \sin b \sin c \cos a + \sin c^2} = \frac{Q}{P},$$

$$\frac{y' \sin a^2 + x' \sin a \sin b \cos c + \sin a \sin c \cos b}{y' \sin a \sin c \cos b + x' \sin b \sin c \cos a + \sin c^2} = \frac{R}{P},$$

welche in Hinsicht auf x' und y' aufgelöset werden müssen. Die dadurch gefundenen Ausdrücke reduziren sich auf eine bemerkenswerthe Weise und sind dann:

$$y' = \frac{R - Q \cos C - P \cos B}{P - Q \cos A - R \cos B},$$

$$x' = \frac{Q - R \cos C - P \cos A}{P - Q \cos A - R \cos B}.$$

Durch sie ist der sphärische Mittelpunkt des Hauptkreises bestimmt, dessen Gleichung $P + Qx + Ry = 0$ oder $P . \sin p + Q . \sin q + R . \sin r = 0$ gegeben ist.

15.

Wenn ein Punkt M durch die Coordinaten-Verhältnisse x und y und eben so ein zweiter Punkt M′ durch die Coordinaten-Verhältnisse x' und y' gegeben ist, so läßt sich daraus der kürzeste sphärische Abstand MM′ der beiden Punkte von einander herleiten, und wird dieser mit d bezeichnet, so ist nach §. 6:

$$\cos d = \frac{1 + (t' + u' \cos C)\, t + (u' + t' \cos C) . u}{\sqrt{(1 + t'^2 + u'^2 + 2t'u' \cos C)} . \sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)}};$$

und hierin wird man nur noch die in Nro. 12 angedeuteten Substitutionen vornehmen.

Setzt man zur Abkürzung:

$$P' = \sin c^2 + 2x \sin b \sin c \cos a + 2y \sin a \sin c \cos b + x^2 \sin b^2 + 2xy \sin a \sin b \cos c + y^2 \sin a^2,$$

$$P' = \sin c^2 + 2x' \sin b \sin c \cos a + 2y' \sin a \sin c \cos b + x'^2 \sin b^2 + 2x'y' \sin a \sin b \cos c + y'^2 \sin a^2,$$

so findet man nach gehöriger Reduction:

$$\cos d = \frac{\sin c^2 + (x+x') \sin b \sin c \cos a + (y+y') \sin a \sin c \cos b + xx' \sin b^2 + (xy'+yx') \sin a \sin b \cos c + yy' \sin a^2}{\sqrt{(P \cdot P')}}.$$

Ferner ist nach §. 6 auch:

$$\sin d = \sqrt{\frac{(t'-t)^2 + 2(t'-t)(u'-u) \cos C + (u'-u)^2 + (tu'-ut')^2 \sin C^2}{(1+t'^2+u'^2+2t'u' \cos C)(1+t^2+u^2+2tu \cos C)}},$$

und durch Substitution erhält man:

$$t'-t = \frac{\sin a \sin b . [(y'-y) \sin c + (xy'-yx') \sin b \cos a]}{(\sin c + x' \sin b \cos a + y' \sin a \cos b)(\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b)},$$

$$u'-u = \frac{\sin a \sin b . [(x'-x) \sin c - (xy'-yx') \sin a \cos b]}{(\sin c + x' \sin b \cos a + y' \sin a \cos b)(\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b)},$$

$$tu'-ut' = \frac{\sin a^2 \sin b^2 (yx'-xy')}{(\sin c + x' \sin b \cos a + y' \sin a \cos b)(\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b)}.$$

Werden diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$\sin d = \sin a \sin b \sin c . \sqrt{\frac{V}{P.P'}},$$

und es ist dann:

$$V^2 . \sin c^2 = [(y'-y) \sin c + (xy'-yx') \sin b \cos a]^2 + 2[(y'-y) \sin c + (xy'-yx') \sin b \cos a][(x'-x) \sin c - (xy'-yx') \sin a \cos b] \cos C + [(x'-x) \sin c - (xy'-yx') \sin a \cos b]^2 + (yx'-xy')^2 \sin a^2 \sin b^2 \sin C^2.$$

Durch weitere Reduction erhält man endlich:

$$V = (y'-y)^2 + 2(y'-y)(x'-x) \cos C + (x'-x)^2 + 2(y'-y)(xy'-yx') \cos A + 2(x'-x)(yx'-xy') \cos B + (xy'-yx')^2.$$

Die erhaltenen Formeln für cos d und sin d, woraus man leicht die Formel für tng d herleitet, sind zugleich die allgemeinsten Gleichungen für einen Kreis, dessen sphärischer Radius $= d$ ist und dessen Mittelpunkt dann durch die beiden Coordinaten-Verhältnisse x' und y' bestimmt ist.

16.

Aus diesen wenigen Proben ersieht man nun hinlänglich, daß man beim Gebrauche der in Rede stehenden Coordinaten-Methode großen Schwierigkeiten entgegen geht, sobald man sie zu metrischen Bestimmungen sphärischer Distanzen und überhaupt sphärischer Größen anwenden will.

Ist, z. B., $\varphi(x, y) = 0$ eine Gleichung zwischen den Coordinaten-Verhältnissen x und y eines Punktes und also die Gleichung einer

Curve, so findet man für das Differenzial des Bogens dieser Curve die Formel:

$$\partial s = \frac{\sin a \sin b \sin c . \sqrt{[\partial y^2 + 2\partial x\,\partial y \cos C + \partial x^2 + 2(\partial y . \cos A - \partial x \cos B)(x\partial y - y\partial x) + (x\partial y - y\partial x)^2]}}{\sin c^2 + 2x \sin b \sin c \cos a + 2y \sin a \sin c \cos b + x^2 \sin b^2 + 2xy \sin a \sin b \cos c + y^2 \sin a^2}.$$

Obgleich nun aber die in vielen Fällen große Lästigkeit weitläufiger Rechnungsausdrücke der neuen Coordinaten-Methode nicht zur Empfehlung dient, so lassen sich gleichwohl sehr viele Raumbeziehungen in überraschender Einfachheit und dabei großer Allgemeinheit auf diesem Wege darstellen. Um ein Beispiel dieser Art zu geben, leiten wir die Gleichung eines Kreises her, welcher um das Coordinaten-Dreieck ABC geschrieben ist.

Diese Gleichung ist zunächst:

$$\cos d = \frac{1 + (t' + u' \cos C)t + (u' + t' \cos C) . u}{\sqrt{(1 + t'^2 + u'^2 + 2t'u' \cos C)} . \sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)}},$$

wenn der Radius des Kreises mit d bezeichnet wird. Da der Kreis durch den Anfangspunkt C gehen soll, so muß für $t = o$ auch $u = o$ seyn, und es ist also:

$$\cos d = \frac{1}{\sqrt{(1 + t'^2 + u'^2 + 2t'u' \cos C)}},$$

oder: $\operatorname{tng} d = \sqrt{(t'^2 + 2t'u' \cos C + u'^2)}$.

Weil der Kreis ferner durch die Coordinaten-Ecke A gehen soll, so muß für $u = o$ auch $t = \operatorname{tng} b$ seyn, und es ist also:

$$\sqrt{(1 + \operatorname{tng} b^2)} = 1 + \operatorname{tng} b\ (t' + u' \cos C) \text{ oder}$$

$$t' + u' \cos C = \frac{1 - \cos b}{\sin b} = \operatorname{tng} \frac{b}{2}.$$

Weil der Kreis endlich auch durch die Coordinaten-Ecke B gehen soll, so findet man eben so:

$$u' + t' \cos C = \frac{1 - \cos a}{\sin a} = \operatorname{tng} \frac{a}{2}.$$

Wird von diesen Werthen Gebrauch gemacht, so findet man die Gleichung:

$$\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)} = 1 + \operatorname{tng} \frac{b}{2} \cdot t + \operatorname{tng} \frac{a}{2} \cdot u;$$

und wenn man nach Nro. 12 zu den Coordinaten-Verhältnissen übergeht, so erhält man nach einiger Reduction die Gleichung:

$$\sqrt{(\sin c^2 + 2x \sin b \sin c \cos a + 2y \sin a \sin c \cos b + x^2 \sin b^2 + 2xy \sin a \sin b \cos c + y^2 \sin a^2)} = \sin c + x \sin b + y \sin a.$$

Wird diese Gleichung endlich rational gemacht, so reduzirt sie sich auf:

so findet man nach gehöriger Reduction:

$$\cos d = \frac{\sin c^2 + (x+x') \sin b \sin c \cos a + (y+y') \sin a \sin c \cos b + xx' \sin b^2 + (xy'+yx') \sin a \sin b \cos c + yy' \sin a^2}{\sqrt{(P \, . \, P')}} \, .$$

Ferner ist nach §. 6 auch:

$$\sin d = \sqrt{\frac{(t'-t)^2 + 2(t'-t)(u'-u) \cos C + (u'-u)^2 + (tu'-ut')^2 \sin C^2}{(1+t'^2+u'^2+2t'u' \cos C)(1+t^2+u^2+2tu \cos C)}} \, ,$$

und durch Substitution erhält man:

$$t'-t = \frac{\sin a \sin b . [(y'-y) \sin c + (xy'-yx') \sin b \cos a]}{(\sin c + x' \sin b \cos a + y' \sin a \cos b)(\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b)} \, ,$$

$$u'-u = \frac{\sin a \sin b . [(x'-x) \sin c - (xy'-yx') \sin a \cos b]}{(\sin c + x' \sin b \cos a + y' \sin a \cos b)(\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b)} \, ,$$

$$tu'-ut' = \frac{\sin a^2 \sin b^2 (yx'-xy')}{(\sin c + x' \sin b \cos a + y' \sin a \cos b)(\sin c + x \sin b \cos a + y \sin a \cos b)} \, .$$

Werden diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$\sin d = \sin a \sin b \sin c \, . \sqrt{\frac{V}{P . P'}} \, ,$$

und es ist dann:

$$V^2 . \sin c^2 = [(y'-y) \sin c + (xy'-yx') \sin b \cos a]^2 + 2[(y'-y) \sin c + (xy'-yx') \sin b \cos a][(x'-x) \sin c - (xy'-yx') \sin a \cos b] \cos C + [(x'-x) \sin c - (xy'-yx') \sin a \cos b]^2 + (yx'-xy')^2 \sin a^2 \sin b^2 \sin C^2 .$$

Durch weitere Reduction erhält man endlich:

$$V = (y'-y)^2 + 2(y'-y)(x'-x) \cos C + (x'-x)^2 + 2(y'-y)(xy'-yx') \cos A + 2(x'-x)(yx'-xy') \cos B + (xy'-yx)^2 .$$

Die erhaltenen Formeln für cos d und sin d, woraus man leicht die Formel für tng d herleitet, sind zugleich die allgemeinsten Gleichungen für einen Kreis, dessen sphärischer Radius = d ist und dessen Mittelpunkt dann durch die beiden Coordinaten-Verhältnisse x' und y' bestimmt ist.

16.

Aus diesen wenigen Proben ersieht man nun hinlänglich, daß man beim Gebrauche der in Rede stehenden Coordinaten-Methode großen Schwierigkeiten entgegen geht, sobald man sie zu metrischen Bestimmungen sphärischer Distanzen und überhaupt sphärischer Größen anwenden will.

Ist, z. B., $\varphi(x, y) = 0$ eine Gleichung zwischen den Coordinaten-Verhältnissen x und y eines Punktes und also die Gleichung einer

Curve, so findet man für das Differenzial des Bogens dieser Curve die Formel:

$$\partial s = \frac{\sin a \sin b \sin c \cdot \sqrt{[\partial y^2 + 2\partial x\, \partial y \cos C + \partial x^2 + 2(\partial y \cdot \cos A - \partial x \cos B)(x\partial y - y\partial x) + (x\partial y - y\partial x)^2]}}{\sin c^2 + 2x \sin b \sin c \cos a + 2y \sin a \sin c \cos b + x^2 \sin b^2 + 2xy \sin a \sin b \cos c + y^2 \sin a^2}.$$

Obgleich nun aber die in vielen Fällen große Lästigkeit weitläufiger Rechnungsausdrücke der neuen Coordinaten-Methode nicht zur Empfehlung dient, so lassen sich gleichwohl sehr viele Raumbeziehungen in überraschender Einfachheit und dabei großer Allgemeinheit auf diesem Wege darstellen. Um ein Beispiel dieser Art zu geben, leiten wir die Gleichung eines Kreises her, welcher um das Coordinaten-Dreieck ABC geschrieben ist.

Diese Gleichung ist zunächst:

$$\cos d = \frac{1 + (t' + u' \cos C)t + (u' + t' \cos C) \cdot u}{\sqrt{(1 + t'^2 + u'^2 + 2t'u' \cos C)} \cdot \sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)}},$$

wenn der Radius des Kreises mit d bezeichnet wird. Da der Kreis durch den Anfangspunkt C gehen soll, so muß für $t = o$ auch $u = o$ seyn, und es ist also:

$$\cos d = \frac{1}{\sqrt{(1 + t'^2 + u'^2 + 2t'u' \cos C)}},$$

oder: $\operatorname{tng} d = \sqrt{(t'^2 + 2t'u' \cos C + u'^2)}$.

Weil der Kreis ferner durch die Coordinaten-Ecke A gehen soll, so muß für $u = o$ auch $t = \operatorname{tng} b$ seyn, und es ist also:

$$\sqrt{(1 + \operatorname{tng} b^2)} = 1 + \operatorname{tng} b\ (t' + u' \cos C) \text{ oder}$$

$$t' + u' \cos C = \frac{1 - \cos b}{\sin b} = \operatorname{tng} \frac{b}{2}.$$

Weil der Kreis endlich auch durch die Coordinaten-Ecke B gehen soll, so findet man eben so:

$$u' + t' \cos C = \frac{1 - \cos a}{\sin a} = \operatorname{tng} \frac{a}{2}.$$

Wird von diesen Werthen Gebrauch gemacht, so findet man die Gleichung:

$$\sqrt{(1 + t^2 + u^2 + 2tu \cos C)} = 1 + \operatorname{tng} \frac{b}{2} \cdot t + \operatorname{tng} \frac{a}{2} \cdot u;$$

und wenn man nach Nro. 12 zu den Coordinaten-Verhältnissen übergeht, so erhält man nach einiger Reduction die Gleichung:

$$\sqrt{(\sin c^2 + 2x \sin b \sin c \cos a + 2y \sin a \sin c \cos b + x^2 \sin b^2 + 2xy \sin a \sin b \cos c + y^2 \sin a^2)} = \sin c + x \sin b + y \sin a.$$

Wird diese Gleichung endlich rational gemacht, so reduzirt sie sich auf:

$$\frac{\operatorname{tng}\frac{a}{2}}{y}+\frac{\operatorname{tng}\frac{b}{2}}{x}+\operatorname{tng}\frac{1}{2}c=o,$$

oder, wenn man nach Nro. 11 die drei Perpendikel p, q, r vom Punkte M der Kreisperipherie auf die Seiten des Coordinaten-Dreiecks fällt, auf:

$$\frac{\operatorname{tng}\frac{a}{2}}{\sin r}+\frac{\operatorname{tng}\frac{b}{2}}{\sin q}+\frac{\operatorname{tng}\frac{c}{2}}{\sin p}=o.$$

Diese Gleichung des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist der Ausdruck einer, wie man sieht, bemerkenswerthen Eigenschaft dieser krummen Linie. Was aber die Form der Gleichung betrifft, so wird sie bald auf eine allgemeinere Art nachgewiesen werden.

Für den Radius d des Kreises findet man, wenn die Werthe

$$t'=\frac{\operatorname{tng}\frac{b}{2}-\operatorname{tng}\frac{a}{2}\cos C}{\sin C},$$

$$u'=\frac{\operatorname{tng}\frac{a}{2}-\operatorname{tng}\frac{b}{2}\cos C}{\sin C}$$

substituirt werden, die Formel:

$$\operatorname{tng} d=\frac{\sqrt{\left(\operatorname{tng}\frac{a^2}{2}-2\operatorname{tng}\frac{a}{2}\operatorname{tng}\frac{b}{2}\cos C+\operatorname{tng}\frac{b^2}{2}\right)}}{\sin C},$$

und wird $\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$ substituirt, so verwandelt sich der obige Ausdruck in: $\operatorname{tng} d=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C}$. Diese Formel kann auch leicht auf eine mehr elementare Weise hergeleitet werden. Werden vom Mittelpunkte des Kreises auf die Seiten des Coordinaten-Dreiecks die Perpendikel p', q', r' gefällt, so ist nach Nro. 12:

$$z'=\frac{\sin r'}{\sin q'}=\frac{t'}{u'}=\frac{\operatorname{tng}\frac{b}{2}-\operatorname{tng}\frac{a}{2}\cos C}{\operatorname{tng}\frac{a}{2}-\operatorname{tng}\frac{b}{2}\cos C}.$$

Eben so ist: $x'=\frac{\operatorname{tng}\frac{c}{2}-\operatorname{tng}\frac{b}{2}\cos A}{\operatorname{tng}\frac{b}{2}-\operatorname{tng}\frac{c}{2}\cos A}$ und $y'=\frac{\operatorname{tng}\frac{c}{2}-\operatorname{tng}\frac{a}{2}\cos B}{\operatorname{tng}\frac{a}{2}-\operatorname{tng}\frac{c}{2}\cos B}$,

und durch diese drei Coordinaten-Verhältnisse ist die Lage des Mittelpunktes bestimmt.

17.

Wenn eine Gleichung $\varphi(x, y) = o$ zwischen den Coordinaten-Verhältnissen x und y des Punktes M einer sphärischen Curve gegeben ist, so findet man die Gleichung an einen berührenden Hauptkreis aus der Gleichung

$$\frac{u - u'}{t - t'} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

indem man substituirt: $\frac{u - u'}{t - t'} = \frac{(x - x')\sin c + (xy' - yx')\sin a \cos b}{(y - y')\sin c - (xy' - yx')\sin b \cos a}$

und $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sin c . \partial x - (x\partial y - y\partial x)\sin a \cos b}{\sin c . \partial y + (x\partial y - y\partial x)\sin b \cos a}$.

Nach gehöriger Reduction erhält man dann die Gleichung

$$y - y' = \frac{\partial y}{\partial x}(x - x')$$

an den durch den Punkt M oder (x, y) gehenden und die Curve berührenden Hauptkreis.

Ist, z. B., $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ die Gleichung an die Curve, so findet man für die durch M gelegte Berührungslinie die Gleichung:

$$y'(Ay + Bx + D) + x'(By + Cx + E) + Dy + Ex + G = o,$$

wie im §. 52, und wenn der durch x und y bestimmte Punkt der krummen Linie nicht angehört, so ist Vorstehendes die Gleichung der **Polaren** des Kegelschnitts, welche den durch x und y bestimmten Punkt zum **Pole** hat.

18.

Wenn man in der Gleichung $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + G = o$ die Werthe

$$x = \frac{\sin q}{\sin p} \text{ und } y = \frac{\sin r}{\sin p}$$

substituirt, so erhält man:

$$A \sin r^2 + 2B \sin r . \sin q + C \sin q^2 + 2D \sin r \sin p + 2E \sin q \sin p + G \sin p^2 = o.$$

Soll nun die Curve durch die erste Coordinaten-Ecke gehen, so muß für $p = o$ auch $q = o$ seyn; daher die Bedingung: $A = o$.

Soll die Curve durch die zweite Coordinaten-Ecke gehen, so muß für $p = o$ auch $r = o$ seyn; daher die Bedingung: $C = o$.

Soll endlich die Curve durch die dritte Coordinaten-Ecke gehen, so muß für $q = o$ auch $r = o$ seyn; daher die Bedingung: $G = o$.

Soll also der Kegelschnitt durch die drei Coordinaten-Ecken gehen, so hat die Gleichung die einfache Form:

$$B.\sin r.\sin q + D.\sin r.\sin p + E \sin q \sin p = o,$$

$$\text{oder: } B + D.\frac{\sin p}{\sin q} + E.\frac{\sin p}{\sin r} = o,$$

$$\text{oder auch: } \frac{M}{x} + \frac{N}{y} = 1.$$

Da diese Gleichung an einen Kegelschnitt ungeachtet der großen Allgemeinheit nur zwei Constanten M und N enthält, so kann sie dazu dienen, sehr allgemeine Theoreme, welche die Kegelschnitte betreffen, auf eine einfache Weise analytisch zu beweisen.

19.

Zum Beschlusse mag daher eine Aufgabe der Art aufgelöset werden. Es ist ein Kegelschnitt ABC gegeben, in welchem Dreiecke ABC und A'B'C' so geschrieben werden, daß die Seite CA immer durch den festen Punkt P und eben so die Seite CB immer durch den festen Punkt Q geht, und man sucht diejenige Curve, welche dabei immer von der dritten Seite AB oder A' B' des Dreiecks berührt wird.

Nehmen wir das Dreieck ACB zum Coordinaten-Dreiecke, so ist die Gleichung an den gegebenen Kegelschnitt: $\frac{M}{x} + \frac{N}{y} = 1$, oder: $My + Nx = xy$. Der Punkt P sey bestimmt durch $x = o$ und $y = m$; der Punkt Q durch $x = n$ und $y = o$. Dann ist die Gleichung an PQ offenbar: $\frac{y}{m} + \frac{x}{n} = 1$.

Der veränderliche Punkt C' endlich sey bestimmt durch die Coordinaten-Verhältnisse $x = t$ und $y = u$. Daher ist auch: $Mu + Nt = tu$.

Die Gleichung an C'A' ist dann: $y - u = \frac{u - m}{t}(x - t)$,

und die Gleichung an CB ist eben so: $y - u = \frac{u}{t - n}(x - t)$. Die Gleichung $My + Nx = xy$ läßt sich ferner umformen in:

$$\frac{M - t}{x - t} + \frac{N - u}{y - u} = 1;$$

und werden mit ihr die beiden vorigen Gleichungen verbunden, so erhält man für den Punkt A' die Ausdrücke:

$$x = \frac{Mm}{m - u} \text{ und } y = \frac{Nm}{u}.$$

Eben so erhält man zur Bestimmung der Lage des Punktes B' die Ausdrücke:

$$x' = \frac{Mn}{t} \text{ und } y = \frac{Nn}{n-t}.$$

Hieraus aber erhält man die folgende Gleichung für die dritte Seite A'B' des Dreiecks:

$$\frac{u(n-t)}{N} \cdot y + \frac{t(m-u)}{M} \cdot x = mn,$$

welche so differenziirt werden muß, daß man darin x und y als constant, dagegen t und u als veränderlich ansieht. Zu dem Ende gibt man ihr zunächst die Form:

$$Mny \,.\, u + Nmx \,.\, t - (My + Nx) \,.\, tu = MNmn,$$

und, indem man $tu = Mu + Nt$ substituirt:

$$Mu(ny - My - Nx) + Nt(mx - My - Nx) = MNmn;$$

und hieraus folgt dann auf der Stelle:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{N(mx - My - Nx)}{M(ny - My - Nx)}.$$

Wird aber auch die Gleichung $Mu + Nt = ut$ differenziirt, so erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{N - u}{M - t},$$

und es ist also: $\frac{N-u}{M-t} = \frac{N(mx - My - Nx)}{M(ny - My - Nx)}$, oder auch:

$$MN(ny - mx) = Mu(ny - My - Nx) - Nt(mx - My - Nx),$$

und wird diese Gleichung mit der Gleichung an A'B',

$$MNmn = Mu(ny - My - Nx) + Nt(mx - My - Nx),$$

verbunden, so kann man die Coordinaten-Verhältnisse x und y des in A'B' befindlichen Berührungspunktes T finden, d. h., als Functionen von t und u darstellen. Diese Functionen lassen sich umkehren, indem man t und u durch x und y ausdrückt; aber man findet dieselben Ausdrücke, indem man die beiden vorstehenden Gleichungen sogleich nach t und u auflöset, wodurch man erhält:

$$u = \frac{N}{2} \cdot \frac{mn + ny - mx}{ny - My - Nx},$$

$$t = \frac{M}{2} \cdot \frac{mn - ny + mx}{mx - My - Nx}.$$

Werden endlich diese Werthe in der Gleichung $\frac{M}{t} + \frac{N}{u} = 1$ substituirt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{2(mx - My - Nx)}{mn - ny + mx} + \frac{2(ny - My - Nx)}{mn + ny - mx} = 1,$$

zwischen den Coordinaten-Verhältnissen x und y des Berührungspunktes T in der Seite A'B' des veränderlichen Dreiecks A'B'C'.

Diese Gleichung gestattet noch eine namhafte Reduction, und ist dann:

$$4mn(xy - My - Nx) = (mn - ny - mx)^2$$

die Gleichung an die Ortscurve des Punktes T, die also in jeder Lage des durch die festen Punkte P und Q gelegten und in den gegebenen Kegelschnitt ACB geschriebenen Dreiecks ABC von der Seite A'B' oder AB berührt wird. Die Curve ist offenbar wieder ein Kegelschnitt.

Man leistet der gefundenen Gleichung Genüge, indem man gleichzeitig setzt: $xy - My - Nx = o$ und $mn - ny - mx = o$. Die erste Gleichung $\frac{M}{x} + \frac{N}{y} = 1$ ist die Gleichung an den gegebenen Kegelschnitt ACB selbst; die zweite Gleichung $\frac{x}{n} + \frac{y}{m} = 1$ ist die Gleichung an die durch die beiden festen Punkte P und Q gezogene Gerade PQ; daher sind die Durchschnittspunkte M und N beider Linien auch Punkte der gesuchten Ortscurve.

Man beweiset nun noch leicht, daß die beiden Kegelschnitte in M und N dieselben Tangenten MV und NV haben; ferner, daß sich die drei Geraden B'P, A'Q und C'T immer in einem Punkte U schneiden, worauf es jedoch hier nicht ankam. In unerträgliche Weitläufigkeiten geräth man aber, wenn man eine andere Coordinaten-Methode, sey es in der Ebene oder auch auf der Oberfläche der Kugel, anwenden und die Gleichung der gesuchten Ortscurve herleiten will. Dieses zur Empfehlung der neuen Coordinaten-Methode bei allgemeinen Untersuchungen.

Bei M. DüMont-Schauberg in Köln erschienen unter andern:

Ahn, F., Handbuch der französ. Umgangssprache. 8. 12 Sgr.—54 Xr.

Cassel, F. P., Morphonomia botanica, sive observationes circa proportionem et evolutionem partium plantarum. Cum figuris lithographicis. 8. 1820. 1 Thlr. — 1 Fl. 48 Xr.

Ciceronis, M. T., pro Q. Roscio Comoedo orationem juridice exposuit Dr. N. München. 8. maj. 1829. 10 Sgr. — 45 Xr.

Dilschneider, Dr. J. J., die deutsche Prosa in klassischen Beispielen, zur Lesung und Erklärung in den obern Klassen der Gymnasien. gr. 8. 20 Sgr. — 1 Fl. 30 Xr.

— — Leitfaden für den Unterricht in der Stil-Lehre, zum Gebrauche in den obern Klassen der Gymnasien. 8. 1828. br. 4 Sgr. — 18 Xr.

— — Verslehre der deutschen Sprache. gr. 8. 1823. 18 Sgr. — 1 Fl. 21 Xr.

— — kleinere Verslehre der deutschen Sprache. Zum Gebrauche in höhern Elementar- und Stadtschulen, so wie in höhern weiblichen Lehranstalten. 8. 10 Sgr. — 45 Xr.

— — und Dr. B. Willmann, Kommentar zur Seber'schen Muster-Sammlung deutscher Gedichte. Für Lehrer und zur Selbstbelehrung. Erste Abtheilung: Erklärung der Hymnen und Oden. gr. 8. 1822. br. 1 Thlr. 12 Sgr. — 2 Fl. 45 Xr.

— — Zweite Abtheilung: Erklärung der Lieder, Elegieen, Heroiden, Kantaten und der lyrischen, durch ihre Form besonders ausgezeichneten Dichtungsarten. gr. 8. 1828. br. 1 Thlr. 12 Sgr. — 2 Fl. 45 Xr.

Fufs, J. D., carmina latina, additis e germanico versis, in quibus Roma et Ars Graecorum A. W. Schlegel, et Ambulatio Fr. Schiller, elegiae, denuo emendatiores vulgatae. In caeteris Schilleri Campana et Goethei Alexis et Dora. Praecedit de linguae latinae cum universo ad scribendum, tum ad poesin usu, deque poesi et poetis neolatinis Dissertatio. 8. maj. 1822. 1 Thlr. 4 Sgr. — 2 Fl.

— — Dissertatio, versuum homoeoteleutorum sive consonantiae in poesi neolatina usum commendans. Adhaerent Schilleri Festum victoriae et Cassandra versibus homoeoteleutis, nec non Goethei elegia XII. latine reddita. 8. maj. 1824. geh. 4 Sgr. — 18 Xr.

Fufs, J. D., ad J. B. Lycocriticum epistola, in qua loci Metamorphoseon et Fastorum Ovidii, nec non alii nonnulli sive defenduntur et illustrantur, sive emendantur, Chr. C. Sprengel emendationes exempli causa refulantur. 8. maj. 1824. br. 7. Ggr. — 30 Xr.

Hoegg, Fr. X., Uebungsstücke zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische und aus dem Lateinischen ins Deutsche, in methodischer Stufenfolge. I. Theil. Für die Sexta eines Gymnasiums. 8. 10 Ggr. — 45 Xr.

Jacob, K. G., Walter Scott. Für die Leser seiner Werke. Ein biographisch-literarischer Versuch. Mit W. Scott's Bildniß. gr. 12. br. 14 Ggr. — 1 Fl.

Menge, Th., Handbuch der Geschichte der Deutschen mit vorzüglicher Berücksichtigung der Geschichte der preuß. Monarchie. Erster Bd. gr. 8. br. 1 Thlr. — 1 Fl. 48 Xr.

Ovidii, P. Nasonis, Heroides et A. Sabini Epistolae. E veterum libr. fide et viror. doct. annot. recens., varias lect. cod. et nonnullarum edit. apposuit, comment., in quibus etiam annotat. N. Heinsii, P. Burmanni, D. I. van Lennep aliorumque viror. doct. partim integrae partim expletae atque emendatae continentur, instruxit, de his carminibus praefatus est et indices addidit V. Loers. Insunt variae lect. XII cod. separatim excusae. Pars I. 8. maj. brosch. 1 Thlr. 16 Ggr. — 3 Fl. (Pars II. ist unter der Presse.)

Platonis Menexenus. Recensuit, e graeco in latinum convertit et commentariis illustravit V. Loers. Inest de Fr. Astii sententia, Menexenum non a Platone scriptum esse, commentatio. 8. 1824. 14 Ggr. — 1 Fl.

Plauti, M. Acci, Aulularia. Edidit Franc. Goeller. 8. maj. 1825. 12 Ggr. — 54 Xr.

— — Trinumus. Cum brevi adnotatione denuo edidit Franc. Goeller. 8. maj. 1824. 12 Ggr. — 54 Xr.

— — Truculentus. Emendatiorem suisque numeris descriptam edidit Franc. Goeller. 8. maj. 1824. 14 Ggr. — 1 Fl.

Quix, Chr., historisch-topographische Beschreibung der Stadt Aachen und ihrer Umgebungen. Mit einer lithograph. Abbildung. 8. br. 16 Ggr. — 1 Fl. 12 Xr.

— — Die Frankenburg und die Vogtei über Burtscheid. Geschichtlich dargestellt. Mit einer lithograph. Abbild. gr. 8. br. 1 Thlr. 4 Ggr. — 2 Fl. 8 Xr.

Schier, Ch. G., Gedichte. Neueste Gabe. 8. 1824. 18 Ggr. — 1 Fl. 30 Xr.

Schmitz, A. J., und Dr. J. J. Dilschneider, systematisch geord-

nete Musterlese aus dem Gebiete der deutschen Dichtkunst, nebst einer kurzgefaßten Poëtik und einigen Erläuterungen. Zum Gebrauche in den obern Klassen der Elementarschulen, in Bürger- u. höhern Töchterschulen und Gymnasien. gr. 8. 12 Sgr. — 54 Xr.

Schmitz, J., vollständiges, nach einer ganz neuen Lehrart bearbeitetes Rechenbuch, enthaltend die alte Rechenkunst mit der Dezimal-Rechenkunde und ihren gegenseitigen Münzen, Maßen und Gewichten vollkommen verglichen. 1r Th. 8. 1815. 12 Sgr. — 54 Xr.

— — vollständiges, nach einer ganz neuen Lehrart bearbeitetes Rechenbuch für Schulen, Handlungs-Institute, angehende Kaufleute und andere Geschäftsmänner, enthaltend alle zusammengesetzten Regeln, die Kettenregel in ihrer weitesten Ausdehnung, ein Kursenbuch, Vergleichungs-Tabellen über die Münzen, Maße und Gewichte von ganz Europa und den wichtigsten außer demselben gelegenen Staaten, die gesammte Kurs- und Wechselwissenschaft u. s. w. 2r Th. gr. 8. 1821. 1 Thlr. 4 Sgr — 2 Fl. 6 Xr.

— — praktisches Hülfsrechenbuch für Lehrer und Lehrerinnen oder Sammlung aller Ausarbeitungen und Auflösungen der im ersten Theile befindlichen Uebungs-Beispiele des Rechenbuchs. 8. 1818. 10 Sgr. — 45 Xr.

— — ausführliche Abwandlung der unregelmäßigen französischen Zeitwörter, mit Beifügung der nämlichen deutschen Zeitwörter zusammengetragen. 8. 1818. 10 Sgr. — 45 Xr.

Seber, F. J., Sammlung von Mustern deutscher Dichter und Prosaiker, für die drei untern Klassen der Gymnasien. Vierte Auflage. gr. 8. 1829. 18 Sgr. — 1 Fl. 21 Xr.

— — Sammlung von Mustern deutscher Dichter für die drei obern Klassen der Gymnasien. 2te, verb. und verm. Aufl. gr. 8. 1825. 1 Thlr. 8 Sgr. — 2 Fl. 24 Xr.

Seckendorff, A. H. E. F. a, de capitis deminutione minima. Dissertatio, ab ill. JCtorum Bonnensium ordine praemio ornata. 8. maj. 6 Sgr. — 27 Xr.

Simon, M., die ältesten Nachrichten von den Bewohnern des linken Rheinufers. Julius Cäsar und seine Feldzüge in Gallien, nebst einem Vorbericht über die Castrametation und das Kriegswesen der alten Römer rc. Mit Fig. und einer Charte von Gallien. gr. 8. br. 2 Thlr. 12 Sgr. — 4 Fl. 30 Xr.

Smets, W., Ferdinand Franz Wallraf. Ein biographisch-panegyrischer Versuch. Nebst 3 Abbildungen in Steindruck. 8. 1825. br. 12 Sgr. — 54 Xr.

Sotzmann, J. D. F., über des Antonius von Worms Abbildung der Stadt Köln aus dem J. 1531. Mit 3 Vorstell. in Steindr. 8. 1819. br. 14 Sgr. — 1 Fl.

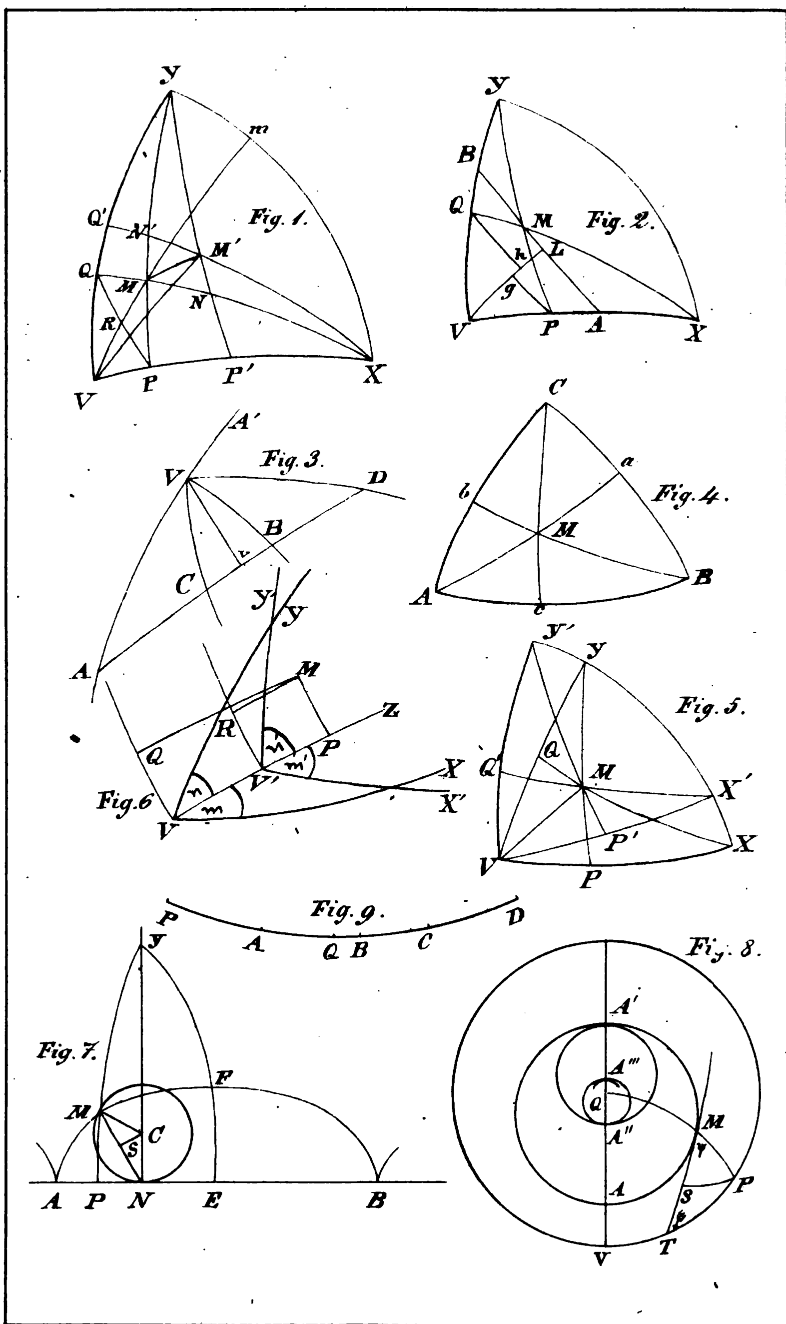
Stierlin, Tabellen zur genauen Vergleichung der metrischen mit den neuen preußischen und der neuen preuß. mit den metrischen Längen-, Flächen- und Körpermaßen. 4. br. 10 Sgr. — 45 Xr.

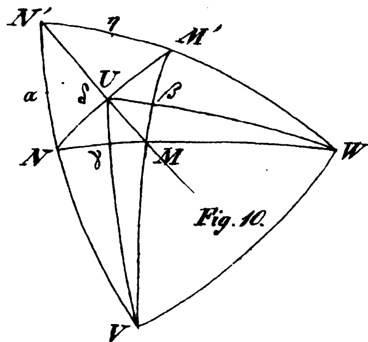
Süren, L., Geschichte des brandenburgisch-preußischen Staates, von den frühesten Nachrichten an, bis auf die neuesten Zeiten. Mit einer Einleitung von K. B. Schmitz. 8 Bdchen. Mit lith. Karten. gr. 12. br. 2 Thlr. — 3 Fl. 36 Xr.

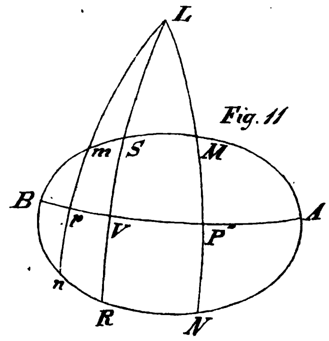
Wagner, Elementar-Naturlehre nach den Grundsätzen der neueren Pädadogik, für Seminarien und Volksschulen bearbeitet. 1r Theil. Nebst 2 lith. Taf. gr. 8. 16 Sgr. — 1 Fl. 12 Xr.

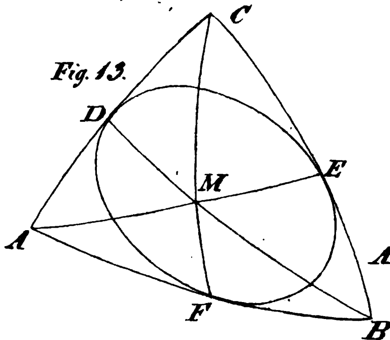
Wallraf, F., Beiträge zur Geschichte der Stadt Köln und ihrer Umgebungen. Mit 5 Abbildungen in Steindr. gr. 8. 1819. br. 1 Thlr. 8 Sgr. — 2 Fl. 24 Xr.

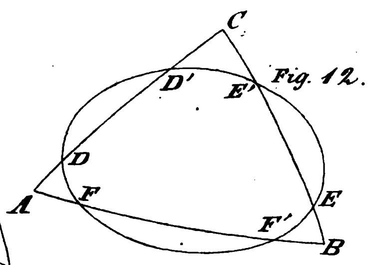
Wilke, D., Elemente der schriftlichen und schnellen mündlichen Unterhaltung in der englischen Sprache. Als Begleiter der englischen Sprachlehre. 8. 10 Sgr. — 45 Xr.

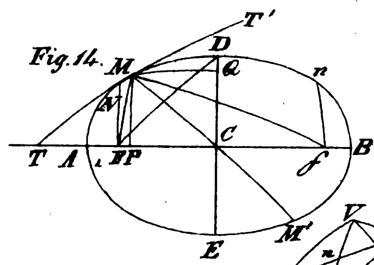

Fig. 1.
Y
m
Q'
N'
M'
Q
M
N
R
V
P
P'
X
Fig. 2.
Y
B
Q
M
h
L
g
V
P
A
X
Fig. 3.
A'
V
D
B
C
A
Fig. 4.
C
a
b
M
A
c
B
Fig. 5.
Y'
Y
Q
Q'
M
X'
P'
V
P
X
Fig. 6
Y'
Y
M
Z
R
Q
P
V'
V
X
X'
Fig. 9.
P
A
Q
B
C
D
Fig. 7.
Y
F
M
C
S
A
P
N
E
B
Fig. 8.
A'
A'''
Q
A''
M
A
S
P
T
V

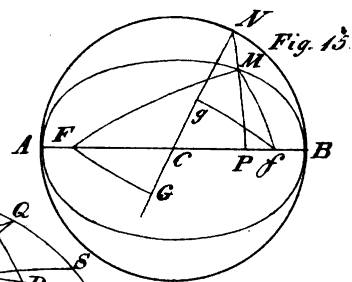

N'
η
M'
α
δ
U
β
N
γ
M
W
V
Fig. 10.

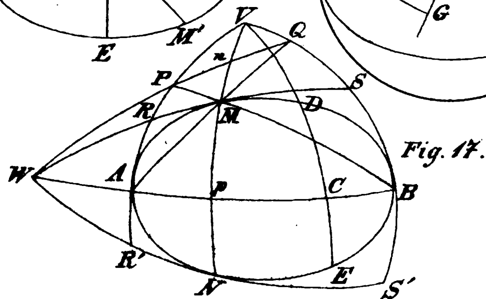

L
Fig. 11
m
S
M
B
A
r
V
P
n
R
N

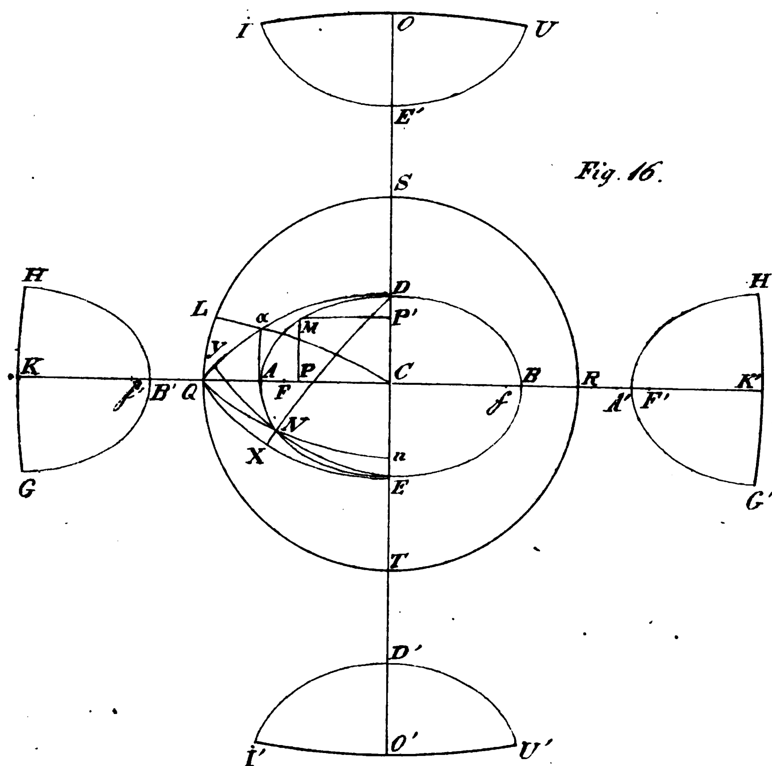

C
Fig. 13.
D
E
M
A
F
B

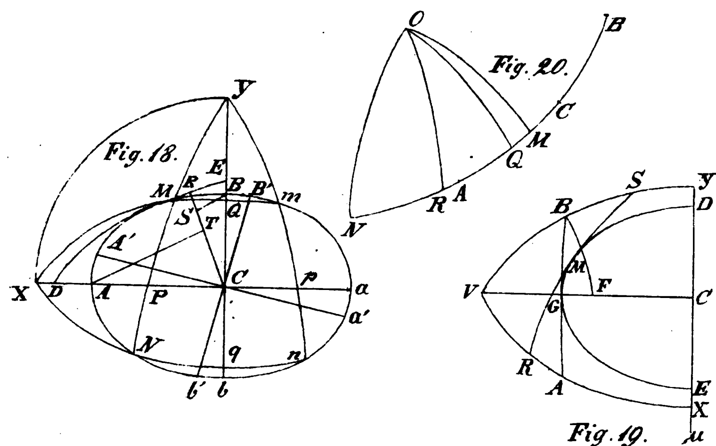

C
D'
E'
Fig. 12.
D
A
F
E
F'
B

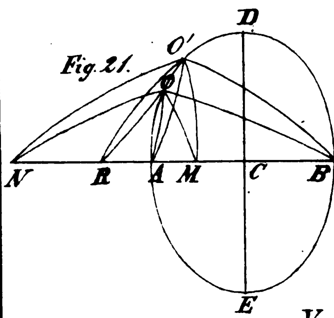

T'
D
Fig. 14.
M
Q
n
N
C
T
A
P
f
B
E
M'

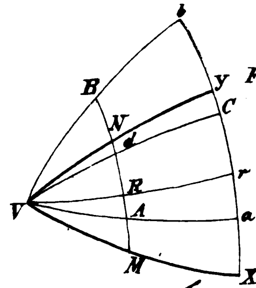

N
Fig. 15.
M
g
A
F
C
P
f
B
G

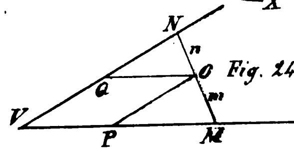

V
Q
n
P
S
R
M
D
Fig. 17.
W
A
p
C
B
R'
N
E
S'

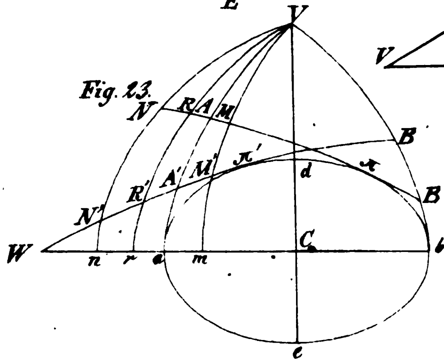

Fig. 16.
I
O
U
E'
S
H
L
α
D
M
P'
V
K
f
B'
Q
A
P
C
B
R
A'
F'
K'
F
f
N
X
n
E
G
G'
T
D'
I'
O'
U'

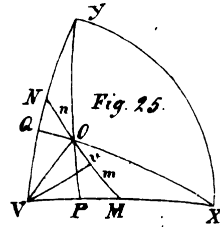

Fig. 18.
Y
E
M
R
B
B'
m
S
T
Q
A'
X
D
A
P
C
p
a
a'
N
q
n
b'
b
Fig. 20.
O
B
C
M
Q
A
R
N
Fig. 19.
S
y
B
D
M
V
F
C
G
R
A
E
X
μ

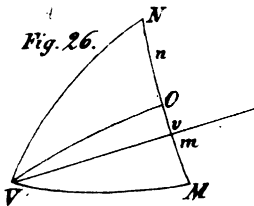

Fig. 21.
O'
O
D
N
R
A
M
C
B
E

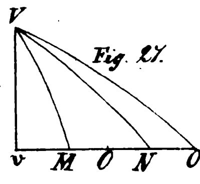

Fig. 22.
b
B
y
C
N
d
r
R
V
A
a
M
X

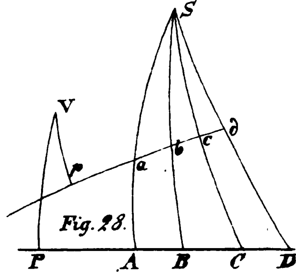

Fig. 24.
N
n
O
Q
m
V
P
M

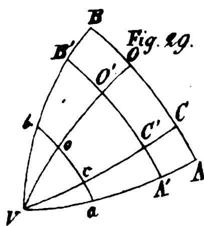

Fig. 23.
V
N
R
A
M
B
A'
M'
d
R'
B
N'
W
n
r
a
m
C
b
e

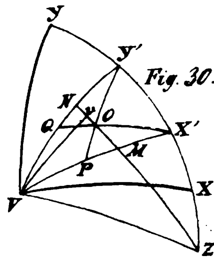

Fig. 25.
Y
N
n
Q
O
m
V
P
M
X


Fig. 26.
N
n
O
v
m
V
M


Fig. 27.
V
v
M
O
N
O'


Fig. 28.
S
V
p
a
b
c
P
A
B
C
D


Fig. 29.
B
B'
O
O'
C
C'
b
o
c
A'
A
V
a


Fig. 30.
Y
Y'
N
O
Q
X'
M
P
V
X
Z

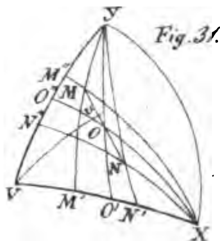
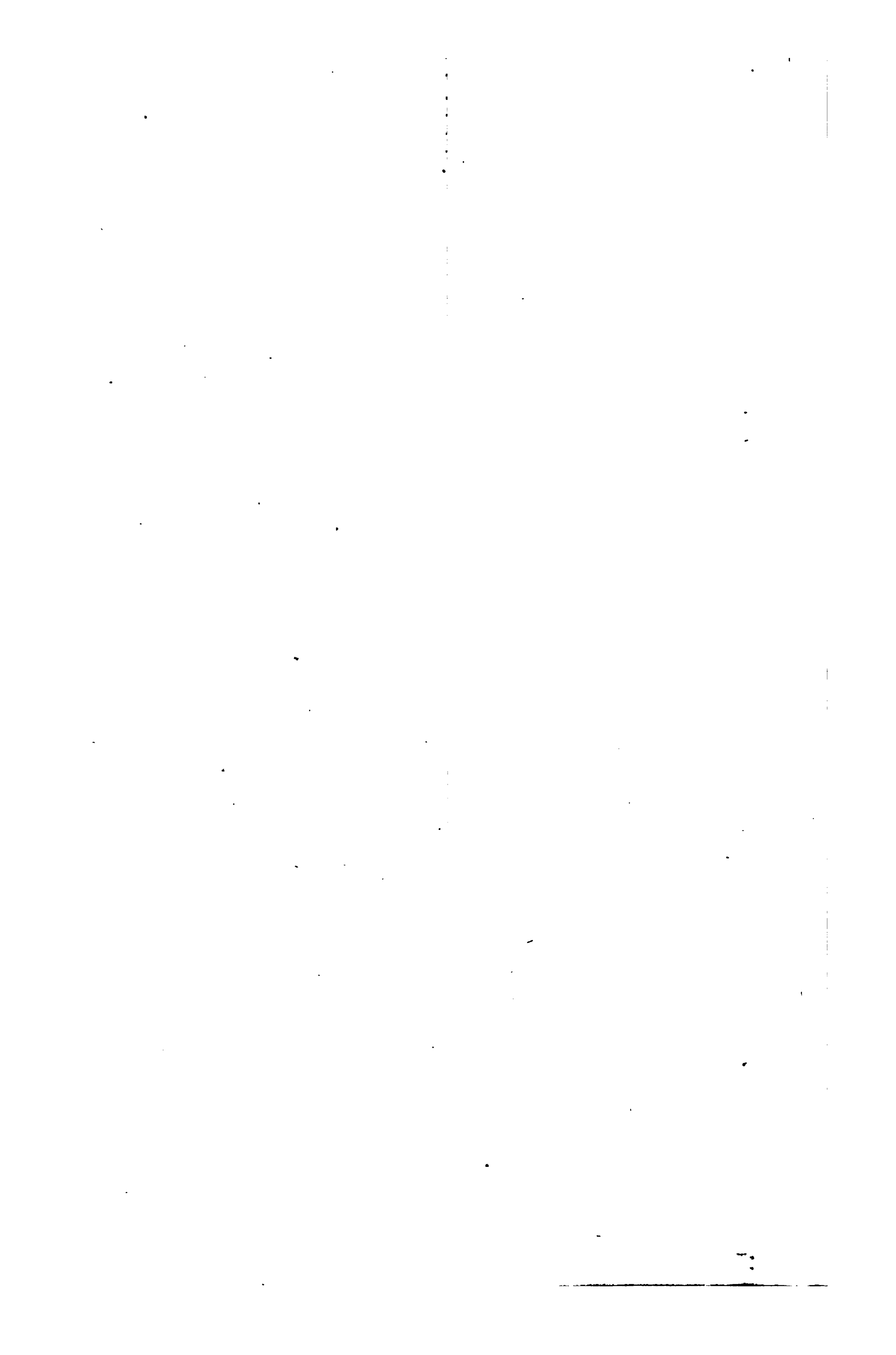
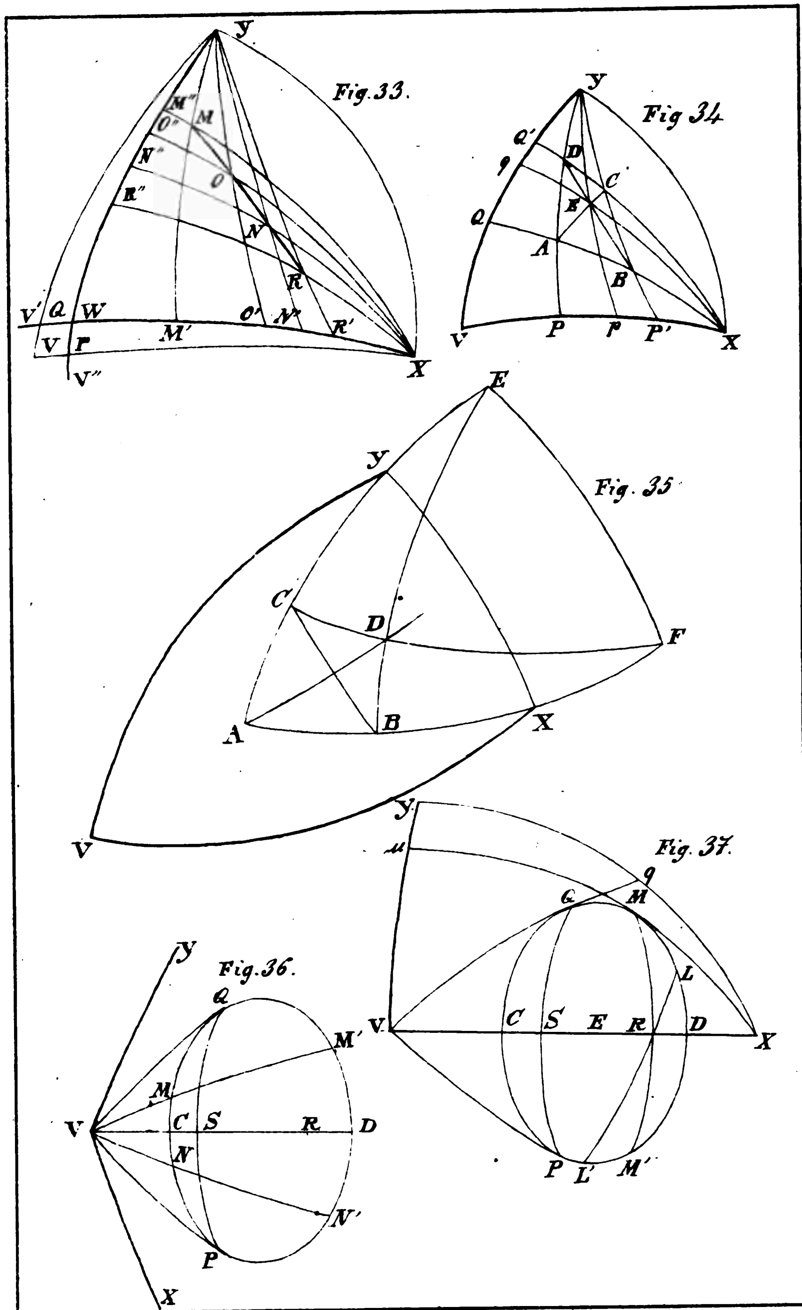
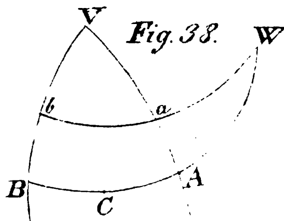
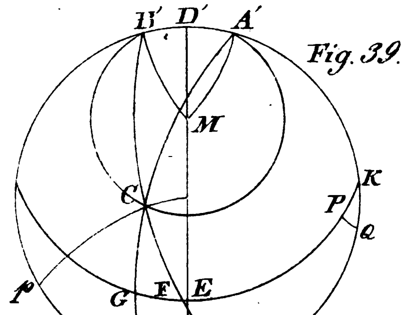

Fig. 31.
Y
M''
O''
M
N''
O
N
V
M'
O'
N'
X

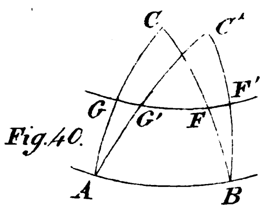

Fig. 32.
W
V
M
O
N

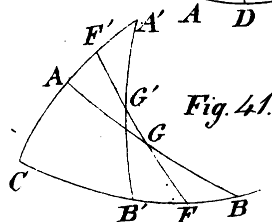


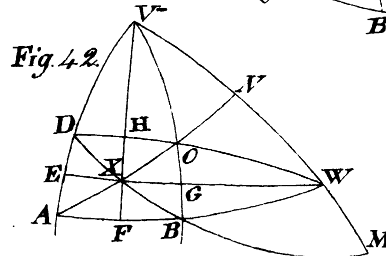

Fig. 33.
Fig 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.

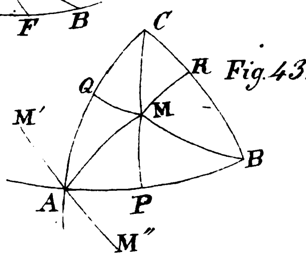

Fig. 38.
V
W
b
a
B
C
A

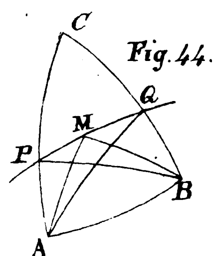

Fig. 39.
B′
D′
A′
M
C
K
P
Q
p
G
F
E
A
D
B

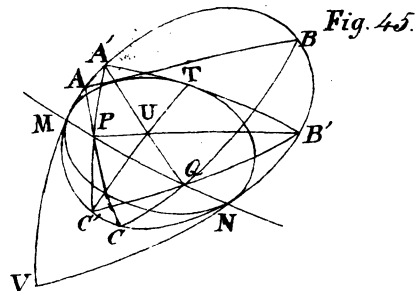

Fig. 40.
C
C′
F′
G
G′
F
A
B


Fig. 41.
F′
A′
A
G′
G
C
B′
F
B


Fig. 42.
V
V′
D
H
O
E
X
W
G
A
F
B
M


Fig. 43.
C
R
Q
M
M′
B
A
P
M″


Fig. 44.
C
Q
M
P
B
A


Fig. 45.
B
A′
A
T
M
P
U
B′
Q
C′
C
N
V

